	МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
	федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»
	ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА **Рабочая программа дисциплины**

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета физико-математического образования и технологии
ФГБОУ ВО «БГПУ»
__________________Н.В. Слесаренко
«03» сентября 2025 г.

Рабочая программа дисциплины
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки
09.03.02 ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ

Профиль
«ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ»

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Принята на заседании кафедры физического и математического образования
(протокол № 6 от «26» марта 2025 г.)

Благовещенск 2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель дисциплины: формирование систематических знаний в области математического анализа, о его месте и роли в системе математических наук, приложениях в естественных науках. Изучение предмета дает возможность получить базовую фундаментальную подготовку по избранному направлению подготовки.

1.2 Место дисциплины в структуре ООП: Дисциплина «Математический анализ» относится к дисциплинам обязательной части блока Б1 (Б1.О.15).

Для освоения дисциплины используются знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения предметов «Математика», «Информатика» в общеобразовательной школе.

1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: ОПК-1:

- **ОПК-1.** Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности, **индикаторами** достижения которой является:

- ИД-1опк-1-знать: основы математики, физики, вычислительной техники и программирования;
- ИД-2опк-1-уметь: решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования;
- ИД-3опк-1-иметь навыки: теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения. В результате изучения дисциплины студент должен

- знать:

- основные понятия и методы математического анализа;

- уметь:

- применять математические методы при решении профессиональных задач повышенной сложности;
- решать типовые задачи по основным разделам курса, используя методы математического анализа;

- владеть:

- методами построения математической модели профессиональных задач и содержательной интерпретации полученных результатов.

1.5 Общая трудоемкость дисциплины «Математический анализ» составляет 8 зачетных единиц (далее – ЗЕ) (288 часов):

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и практических занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Объем дисциплины и виды учебной деятельности (очная форма обучения)

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 1	Семестр 2
Общая трудоемкость	288	108	144
Аудиторные занятия	126	54	72
Лекции	50	22	28
Практические занятия	76	32	44
Самостоятельная работа	126	54	72

Вид итогового контроля	36	Зачёт	Экзамен

Объем дисциплины и виды учебной деятельности (заочная форма обучения)

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 2	Семестр 3
Общая трудоемкость	288	104	171
Аудиторные занятия	30	14	16
Лекции	12	6	6
Практические занятия	18	8	10
Самостоятельная работа	245	90	155
Вид итогового контроля	13	Зачет	Экзамен

2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

2.1 Очная форма обучения

Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
	Раздел I. **Введение в анализ.**	**64**	**14**	**18**	**32**
1.	Действительные числа.	8	2	2	4
2.	Функции.	12	2	4	6
3.	Предел.	36	8	10	18
4.	Непрерывность функции.	8	2	2	4
	Раздел II. **Дифференциальное исчисление для функций одной переменной.**	**44**	**8**	**14**	**22**
1.	Производная и дифференциал.	24	4	8	12
2.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.	20	4	6	10
	Итого 1 семестр	**108**	**22**	**32**	**54**
2 семестр					
	Раздел III. **Ряды**	**24**	**4**	**8**	**12**
1.	Числовые ряды.	12	2	4	6
2.	Функциональные ряды.	12	2	4	6
	Раздел IV. **Интегральное исчисление для функций одной переменной.**	**40**	**8**	**12**	**20**
1.	Неопределенный интеграл.	24	4	8	12

2.	Определенный интеграл.	8	2	2	4
3.	Приложения определенного интеграла.	8	2	2	4
	Раздел |V. **Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных.**	**20**	**4**	**6**	**10**
1.	Функции нескольких переменных.	6	1	2	3
2.	Дифференцируемые функции.	6	1	2	3
3.	Экстремумы функции нескольких переменных.	8	2	2	4
	Раздел VI. **Интегральное исчисление для функций нескольких переменных.**	**36**	**8**	**10**	**18**
1.	Двойные и тройные интегралы.	20	4	6	10
2.	Некоторые применения кратных интегралов.	8	2	2	4
3.	Криволинейные интегралы.	8	2	2	4
	Раздел VII. **Дифференциальные уравнения.**	**24**	**4**	**8**	**12**
1.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	12	2	4	6
2.	Дифференциальные уравнения высших порядков	12	2	4	6
	Итого 2 семестр	**144**	**28**	**44**	**72**
	Зачет	**10**			
	Экзамен	**26**			
ИТОГО		**288**	**50**	**76**	**126**

Интерактивное обучение по дисциплине

№	**Наименование тем (разделов)**	**Вид занятия**	**Форма интерактивного занятия**	**Кол-во часов**
	1 семестр			
1.	Действительные числа.	пр	Групповая работа: «Решение уравнений и неравенств с модулем».	2
2.	Функции.	л	Круглый стол: «Доказательство свойств функции».	2
3.	Предел.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Предел функции».	1

4.	Предел.	пр	Групповая работа: «Доказательство второго замечательного предела».	2
5.	Непрерывность функции.	пр	Работа в малых группах «Исследование функции на непрерывность».	2
6.	Производная и дифференциал функции.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Производная».	1
7.	Производная и дифференциал функции.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Производная сложной функции».	2
8.	Производная и дифференциал функции.	пр	Работа в малых группах: «Вычисление производной функции».	2
9.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.	л	Инддивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Исследование функции с помощью производной».	2
10.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.	пр	Групповая работа: Тренинг 1 «Промежутки возрастания, убывания функции». Тренинг 2 «Промежутки выпуклости, вогнутости функции».	2
Итого 1 семестр				**18**
2 семестр				
1.	Числовые ряды.	пр	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Ряды».	1
2.	Функциональные ряды.	пр	Работа в малых группах: «разложение функции в степенной ряд. Приближенные вычисления с помощью рядов».	2
3.	Неопределенный интеграл.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Метод интегрирования по частям».	2
4.	Неопределенный интеграл.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Интегрирование дробно-рациональных функций».	2

5.	Приложения определенного интеграла.	л	Круглый стол: «Приложения определенного интеграла».	2
6.	Функции нескольких переменных.	пр	Работа в малых группах: «Построение линий уровня»	1
7.	Экстремумы функции нескольких переменных.	пр	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Условный экстремум».	1
8.	Двойные и тройные интегралы.	пр	Групповая работа: Вычисление двойных интегралов.	2
9.	Двойные и тройные интегралы.	пр	Групповая работа: Вычисление тройных интегралов.	2
10.	Некоторые применения кратных интегралов.	л	Круглый стол: «Приложения кратных интегралов».	2
11.	Криволинейные интегралы.	пр	Работа в малых группах: «Криволинейные интегралы 1рода, 2 рода».	2
12.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка».	2
13.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	пр	Работа в малых группах: «Решение дифференциальных уравнений первого порядка методом изоклин».	1
14.	Дифференциальные уравнения высших порядков	пр	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части».	2
Итого 2 семестр				**24**
ИТОГО				**42**

1.2 Заочная форма обучения

Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
	Раздел I. **Введение в анализ.**	**62**	**4**	**2**	**54**
5.	Действительные числа.	10	1	0	9
6.	Функции.	12	1	0	11

7.	Предел.	32	1	3	28
8.	Непрерывность функции.	8	1	1	6
	Раздел II. **Дифференциальное исчисление для функций одной переменной.**	**42**	**2**	**4**	**36**
3.	Производная и дифференциал.	24	1	2	21
4.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.	18	1	2	15
	Итого 2 семестр	**104**	**6**	**8**	**90**
3 семестр					
	Раздел III. **Ряды**	**32**	**1**	**2**	**29**
3.	Числовые ряды.	16	1	1	14
4.	Функциональные ряды.	16	0	1	15
	Раздел IV. **Интегральное исчисление для функций одной переменной.**	**42**	**2**	**2**	**38**
4.	Неопределенный интеграл.	20	1	1	18
5.	Определенный интеграл.	11	0	1	10
6.	Приложения определенного интеграла.	11	1	0	10
	Раздел |V. **Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных.**	**32**	**1**	**2**	**29**
4.	Функции нескольких переменных.	11	1	0	10
5.	Дифференцируемые функции.	11	0	1	10
6.	Экстремумы функции нескольких переменных.	10	0	1	9
	Раздел VI. **Интегральное исчисление для функций нескольких переменных.**	**33**	**1**	**2**	**30**
4.	Двойные и тройные интегралы.	12	1	1	10
5.	Некоторые применения кратных интегралов.	11	0	1	10
6.	Криволинейные интегралы.	10	0	0	10

	Раздел VII. **Дифференциальные уравнения.**	**32**	**1**	**2**	**29**
3.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	16	1	1	14
4.	Дифференциальные уравнения высших порядков	16	0	1	15
	Итого 3 семестр	**171**	**6**	**10**	**155**
	Зачет	4			
	Экзамен	9			
ИТОГО		**288**	**12**	**18**	**245**

Интерактивное обучение по дисциплине

№	**Наименование тем (разделов)**	**Вид занятия**	**Форма интерактивного занятия**	**Кол-во часов**
	2 семестр			
1.	Предел.	пр	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Предел функции».	1
2.	Производная и дифференциал функции.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Производная сложной функции».	1
3.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Исследование функции с помощью производной».	1
4.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.	пр	Групповая работа: Тренинг 1 «Промежутки возрастания, убывания функции». Тренинг 2 «Промежутки выпуклости, вогнутости функции».	1
Итого 2 семестр				**4**
		3 семестр		
3.	Неопределенный интеграл.	пр	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Метод интегрирования по частям».	1

4.	Неопределенный интеграл.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Интегрирование дробно-рациональных функций».	1
8.	Двойные и тройные интегралы.	пр	Групповая работа: Вычисление двойных интегралов.	1
9.	Двойные и тройные интегралы.	пр	Групповая работа: Вычисление тройных интегралов.	1
12.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка».	1
14.	Дифференциальные уравнения высших порядков.	пр	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части».	1
Итого 3 семестр				**6**
ИТОГО				**10**

3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

РАЗДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Тема 1. Действительные числа.

Множество действительных чисел. Геометрическое изображение действительных чисел. Непрерывность множества действительных чисел. Ограниченные, неограниченные множества. Промежутки. Супремум и инфимум множества, их существование.

Тема 2. Функции.

Отображения. Действительная функция действительной переменной. Некоторые типы поведения функции. Сложная функция. Обратная функция.

Тема 3. Предел.

Предел функции в точке. Свойства функции, имеющей предел в точке. Предел функции по множеству. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности и бесконечный предел. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Бесконечно малые функции и их свойства. Предел суммы, произведения, частного. Предельный переход в неравенствах. Предел сложной функции. Первый замечательный предел. Сравнение бесконечно малых функций. Второй замечательный предел.

Тема 2. Непрерывность функции.

Непрерывность функции в точке и на множестве. Арифметические операции над непрерывными функциями. Предельный переход под знаком непрерывной функции. Точки разрыва. Теоремы о промежуточном значении непрерывной функции. Ограниченность, достижение функцией наибольшего и наименьшего значений, непрерывность на отрезке. Элементарные функции.

РАЗДЕЛ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Тема 1. Производная и дифференциал.

Дифференцируемость функции. Производная и дифференциал, их геометрический и механический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференцирование суммы, произведения, частного. Дифференцирование сложной функции. Производная обратной функции. Таблица производных. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциалы высших порядков.

Тема 2. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.

Признаки постоянства, возрастания и убывания функции на промежутке. Максимум и минимум. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций.

РАЗДЕЛ III. РЯДЫ

Тема 1. Числовые ряды.

Числовой ряд. Сходящиеся ряды. Остаток сходящегося ряда. Необходимое условие сходимости. Сравнение рядов. Признаки Даламбера и Коши. Понятие знакопеременного ряда, абсолютная и условная сходимости. Теоремы об остатке ряда. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.

Тема 2. Функциональные ряды.

Функциональный ряд. Область сходимости. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Приближенные вычисления с помощью рядов.

РАЗДЕЛ IV. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Тема 1. Неопределенный интеграл.

Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших иррациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций.

Тема 2. Определенный интеграл.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной.

Тема 3. Приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление объема тела вращения. Вычисление длины гладкой дуги.

РАЗДЕЛ V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Тема 1. Функции нескольких переменных.

Понятие функции. График функции двух переменных. Предел и непрерывность.

Тема 2. Дифференцируемые функции.

Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал. Достаточные условия дифференцируемости. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Тема 3. Экстремумы функции нескольких переменных.

Понятие максимума и минимума. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума для функции двух переменных.

РАЗДЕЛ VI. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Тема 1. Двойной и тройной интегралы.

Понятие двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием. Двойной интеграл в полярных координатах.

Понятие тройного интеграла. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

Тема 2. Некоторые применения кратных интегралов.

Геометрические и физические приложения кратных интегралов.

Тема 3. Криволинейные интегралы.

Криволинейный интеграл и его основные свойства. Вычисление криволинейных интегралов.

РАЗДЕЛ VII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

Основные понятия. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

Тема 2. Дифференциальные уравнения высших порядков.

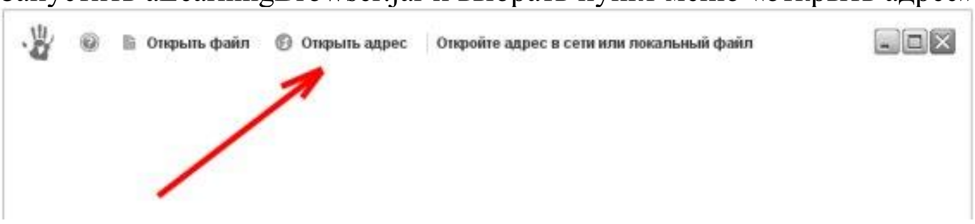
Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

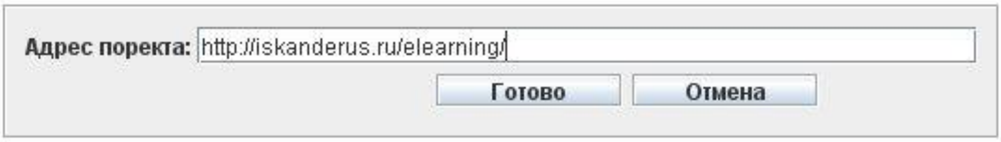
Данные рекомендации призваны помочь студентам в организации самостоятельной работы по освоению курса. «Математический анализ» - одна из основных математических дисциплин, которая изучается студентами направления подготовки «информационные системы» на протяжении 2 семестров. Количество часов, выделенное на изучение данного курса не велико, поэтому необходимо как можно компактнее и целостнее преподнести студентам данный предмет. Целью настоящего курса является научное обоснование относящихся к нему понятий, формирование умений и навыков решения различных типов задач. Курс математического анализа имеет также общеобразовательное и прикладное значение.

Использование информационных технологий в процессе обучения становиться неотъемлемой частью самого процесса. Компьютерная технология может быть использована, как в качестве средства, так и участника данного процесса. При изучении некоторых тем курса математического анализа целесообразно воспользоваться электронными обучающими ресурсами системы Iskanderus eLearning (см. в таблице «интерактивное обучение по дисциплине»). Для работы с ресурсами необходимо:

1. Установить виртуальную машину Java.
2. Загрузить к себе на компьютер java-программу проигрывателя электронных курсов aLearningBrowser.jar.
3. Запустить aLearningBrowser.jar и выбрать пункт меню «открыть адрес»:



4. Дописать название курса в строке адреса:



Интерактивный обучающий курс, созданный в системе Iskanderus eLearning позволяет строить обучение, учитывающее индивидуальные особенности обучаемого, активно помогает учащимся сосредоточить внимание на наиболее важных аспектах изучаемого материала. Подбирает для каждого учащегося определенную скорость подачи информации, количество повторений и объяснений не понятных моментов, не торопит с решениями, дает возможность несколько раз ознакомиться с тем или иным материалом. Диалог с пользователем ведется интерактивном режиме, позволяющем выбирать содержание учебного материала и маршрут движения. Процесс взаимодействия между преподавателем и студентом, осуществляется опосредованно, в качестве интеллектуального посредника выступает интерактивный обучающий курс. Опыт использования интерактивных электронных ресурсов системы Iskanderus eLearning при изучении курса математического анализа показал, что материал, предлагаемый для изучения, доступен и понятен студентам, и может быть освоен ими самостоятельно.

В результате изучения курса студент должен овладеть основными понятиями математического анализа, уметь применять их при доказательстве важнейших свойств и теорем, приобрести навыки и умения, связанные с решением примеров и задач. Освоение курса математического анализа предполагает помимо посещения лекций и практических занятий выполнение домашних заданий. При этом особое внимание уделяется самостоятельной работе студентов. На практических занятиях должны быть выработаны соответствующие навыки и умения, связанные с решением примеров и задач.

В рабочей программе имеются примерные варианты контрольной и самостоятельных работ, которые позволят проверить уровень усвоения изученного материала.

Подготовку к зачету (экзамену) наиболее рационально осуществлять путем повторения и систематизации курса с помощью кратких конспектов. При работе с теоретическим материалом студент должен уяснить наиболее важные идеи каждой темы, уметь пользоваться основными понятиями и утверждениями (знать их формулировки, демонстрировать их использование на примерах, понимать условия применения и т.д.). Как правило, каждая тема, изученная в рамках курса, содержит ряд основных задач, приемами и методами решения, которых должен владеть студент. Рабочая программа содержит программы зачета и экзамена по курсу математического анализа, которые позволят наиболее эффективно организовать подготовку к ним. Предлагается при изучении математического анализа пользоваться материалами из «списка литературы и информационных ресурсов».

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
Раздел I. **Введение в анализ.**			**32**
1.	Действительные числа.	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ.	4
2.	Функции.		6
3.	Предел.		18
4.	Непрерывность функции.		4
Раздел II. **Дифференциальное исчисление для функций одной переменной.**			**22**
1.	Производная и дифференциал.	Подготовка к практическим занятиям.	12

2.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.	Выполнение домашних работ. Выполнение индивидуального задания.	10
Раздел III. **Ряды**			**12**
1.	Числовые ряды.	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Выполнение индивидуального задания.	6
2.	Функциональные ряды.		6
Раздел IV. **Интегральное исчисление для функций одной переменной.**			**20**
1.	Неопределенный интеграл.	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Выполнение индивидуального задания.	12
2.	Определенный интеграл.		4
3.	Приложения определенного интеграла.		4
Раздел |V. **Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных.**			**10**
1.	Функции нескольких переменных.	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Выполнение индивидуального задания.	3
2.	Дифференцируемые функции.		3
3.	Экстремумы функции нескольких переменных.		4
Раздел VI. **Интегральное исчисление для функций нескольких переменных.**			**18**
1.	Двойные и тройные интегралы.	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Выполнение индивидуального задания.	10
2.	Некоторые применения кратных интегралов.		4
3.	Криволинейные интегралы.		4
Раздел VII. **Дифференциальные уравнения.**			**12**
1.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Выполнение индивидуального задания.	6
2.	Дифференциальные уравнения высших порядков		6

5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

РАЗДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Тема 1. Действительные числа

2 часа

Содержание

Практическое занятие

1. Запишите с помощью знака модуля следующие неравенства

а) $-3<x<3$; б) $-7\le x\le 7$; в) $-4\le x+1\le 4$;

г) $-5<x<3$; д) $-3\le x\le 5$.

2. Решите неравенства:

а) $|x+3|\ge 2$; б) $|x^2-5|>2$; в) $|x|<x+1$; г) $|x^2-2x-3|>x^2-2x-3$.

3. Решите уравнения:

а) $|x-1|+|x+3|=6$ б) $\frac{(|x|-4)^2-|x|-2}{x+2}=0$ в) $x^2+2x=2|x+1|+7$

4. Решите неравенства:

а) $3|x-1|\le x+3$ б) $|x+1|<3x-|x-2|$ в) $(2x+3)^2-|2x+3|\le 30$

г) $\frac{4}{|x|-1}\ge |x-1|$

5. Решите уравнения:

а) $|2x+3|=x^2$ б) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\frac{x-1}{x+1}$

6. Какие из числовых множеств рациональных чисел вида $\frac{p}{q}$ ограничены снизу, сверху, ограничены. Найти **sup** и **inf** ограниченных множеств:

а) $0<p<q$ б) $0<q<p$

Литература:

1. Пушкина, Г.А. Действительные числа: методические рекомендации / Г.А.Пушкина, О.Н.Пушкина. – Благовещенск: Благовещенский гос. пед. ун-т. – 1998.- 30 с.

Тема 2. Функции

4 часа

Содержание

Практическое занятие 1

1. Является ли данная функция ограниченной снизу, сверху?

$y=x^2$ $y=x$

$y=-x^4$ $y=\lg x$

$y=\sin x$ $y=tgx$

$y=10\cos x$ $y=\frac{1}{x}$

2. Найти область определения функции:

а) $y=\sqrt{-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$; б) $y=\arcsin(x+1)^3$; в) $y=\sqrt{1+x}$;

г) $y=\sqrt[3]{1+x}$;

д) $y=\dfrac{1}{4-x^2}$; е) $y=\sqrt[4]{9-x^2}$; ж) $y=\sqrt{2+x-x^2}$;

з) $y=\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x}$; и) $y=\ln(\dfrac{2+x}{2-x})$;

3. Построить график функции, используя элементарные преобразования графиков:

$y=x^2-1$

$y=(x-2)^2$

$y=-3\sin x$

$y=\ln(-x)$

$y=\left|x^2-1\right|$

$y=(|x|-2)^2$

$y=x^2-x-2$

Практическое занятие 2

1. Исследуйте функцию на четность и нечетность.

$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$y=x^2-5x+6$

$y=x^2-x+1$

$y=\sqrt[4]{9-x^2}$

$y=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$

$y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

$y=\lg\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

2. Для приведенной функции найдите наименьший положительный период T, если она периодическая.

$y=5\sin 3x$

$y=3\sin 5x+4\cos 7x$

$y=\sqrt{tgx}$

$y=\sin^2 x$

$y=\sin\sqrt{x}, D(x)=[0;+\infty)$

3. Построить графики функций:

$$y=\frac{|sinx|}{sinx} \qquad y=\frac{|2+sinx|}{2+sinx}$$

$$y=\begin{cases} x^2 & \text{при } -2\le x<0 \\ 1 & \text{при } x=0 \\ 2x-1 & \text{при } 0<x\le 2 \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} cosx & \text{при } -\pi\le x\le 0 \\ 2 & \text{при } 0<x<1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } 1\le x\le 4 \end{cases}$$

Литература:

1. Баврин, И.И.Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.

2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с.

Тема 3. Предел

10 часов

Содержание

Практическое занятие 1

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^2-x-2}$

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2-7x-15}$ 4. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^7+1}{x^2-x-2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$ 6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$ 9. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ 11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{4-x^2}$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3}}{x^2}$ 13. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-5\sqrt{x}+6}{x-4}$

14. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-1}{x^2-4x+3}$ 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+4x+2)}{\ln(x^{10}+x^3+x^2)}$

16. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{4x^2+4x}+x)$

Практическое занятие 2

1. Сравнить бесконечно малые величины $\alpha = t\sin^2 t$ и $\beta = 2t\sin t$ при $t\to 0$.
2. Сравнить бесконечно малые величины $\alpha = t^2 tgt$ и $\beta = t^2\sin^2 t$ при $t\to 0$.
3. Сравнить бесконечно малые величины $\alpha = 5t^2+2t^5$ и $\beta = 3t^2+2t^3$ при $t\to 0$.
4. Найти пределы функций

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{ctgx-ctga}{x-a}$

$\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$

5. Найти пределы

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$; $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

Практическое занятие 3

1. Для приведенных ниже последовательностей записать формулу общего члена последовательности.
   $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \qquad \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$
2. Последовательность $\{y_n\}$ задана формулой общего члена последовательности $\{y_n\}$ $= \frac{2n+1}{n+3}$. Найти y_{10}, y_{n-1}, y_{n+1}.
3. Найти предел последовательности: 0,2; 0.23; 0,233; 0,2333; .... ***Общий член последовательности можно записать:*** $y_n = 0{,}2 + [0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots]$
4. Найти предел последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \ldots + \frac{n-1}{n^2})$.
5. Найти предел последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n})$.
6. Найти предел последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$.
7. Найти односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 3-0} 5^{\frac{1}{x-3}}$, $\lim\limits_{x\to 3+0} 5^{\frac{1}{x-3}}$.
8. Найти предел последовательности: 1,6; 1.66; 1,666; 1,6666; ....
9. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n \sin n!}{n^2+1}$

Практическое занятие 4

Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}$; 4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx - \sin x}{x}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[4]{1+x^2} - 1\right) \cdot tg\frac{x}{3}}{x}$; 7. $\lim\limits_{x\to 0} x ctgx$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x) - 2\sin a}{x^2}$; 9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$; 11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(a+x) + \cos(a-x) - 2\cos a}{1-\cos x}$; 12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx - \sin x}{x^2}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}$.

Практическое занятие 5

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)^{4n^2} = e$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^3 + 6n - 1}{n^3 + 6n + 20}\right)^{n^2} = 1$ 3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2 - n - 1}{n^2 + 2}\right)^{n^2} = 0$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{3}{x})^x$ 5. $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x-1}{x+1})^x$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{2x+3}{2x-1})^x$ 7. $\lim\limits_{x\to\infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2))$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$ 9. $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x}{x+1})^x$ 10. $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{2+x}{3-x})^x$ 11. $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{x^2+2}{2x^2+1})^{x^2}$

12. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{x}$

Литература:

1. Баврин, И.И.Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с.
3. Насонова, Л.В. Избранные вопросы математического анализа. Предел и непрерывность. Часть 1,2: Методические рекомендации / Л.В.Насонова, И.В. Квасова, В.В.Попов. – Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2002.

Тема 4. Непрерывность функции.

2 часа

Содержание

Практическое занятие

1. Исследовать на непрерывность функцию:

$$y = e^x \quad \textit{в точке } x = 1$$

$$y = 4x^2 \quad \textit{в точке } x = 2$$

2. Показать, что функция непрерывна для любого значения аргумента х:

$$y = x^3$$

$$y = \sin x$$

3-7 Исследовать на непрерывность функцию:

3. $f(x) = \begin{cases} x-1, & \textit{если } 0 \le x \le 3 \\ 3-x, & \textit{если } 3 < x \le 4 \end{cases}$ 4. $y = \dfrac{x^2 - 25}{x-5}$ 5. $y = \dfrac{1}{x^2}$ 6. $y = \dfrac{\sin x}{|x|}$ 7. $y = \dfrac{\sin x}{x}$

8. Является ли функция $f(x) = |sign\ x|$ непрерывной в точке $x = 0$.

9. Исследовать на непрерывность $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$:

1

10. Исследовать на непрерывность $f(x) = [x]$ **:**

11. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = 5^{\frac{1}{3-x}}$.

12. Определить приращение аргумента x и приращение функции $y = \lg x$, если аргумент x изменился от 10 до 100.
13. Показать, что для линейной функции $y = ax + b$ приращение не зависит от x.
14. Доказать непрерывность функции $y = \sqrt{x}$.
15. Доказать, что функция $y = |x|$ непрерывна.

17-18. **Определить точки разрыва функций:**

16. $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

17. $f(x) = tg(2x + \frac{\pi}{4})$

18. $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$

Литература:

1. Баврин, И.И.Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с.
3. Насонова, Л.В. Избранные вопросы математического анализа. Предел и непрерывность. Часть 1,2: Методические рекомендации / Л.В.Насонова, И.В. Квасова, В.В.Попов. – Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2002.

РАЗДЕЛ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Тема 1. Производная и дифференциал.

8 часов

Содержание

Практическое занятие 1

1. Найти производную функции по определению : $y = x^3$
2. Найти производную функции по определению : $y = \sqrt{x}$
3. Найти производные функций:

$y = x^5$ $\quad y = \sqrt[7]{x^3}$ $\quad y = \frac{1}{x^2}$ $\quad y = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x^2}$

$y = ax^{-5}$ $\quad y = \sqrt[n]{x}$ $\quad y = \sqrt{\sqrt[3]{x}}$ $\quad y = x^3 \sqrt[5]{x}$

$y = \frac{tgx}{x}$ $\quad y = ctgx \arccos x$ $\quad y = \log_2 x \cdot 2^x$ $\quad y = \frac{e^x}{\ln x}$

4. Найти производные функций:

$y = \sqrt{tgx}$ $\quad y = \sqrt[3]{arctgx} - (\arcsin x)^3$ $\quad y = \lg \sin x$

$y = arcctg(\ln x) + \ln(arctgx)$ $\quad y = (e^{5x} - ctg4x)^5$ $\quad y = \cos e^{3x}$

$y = arctg\sqrt{-x}$ $\quad y = 2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$ $\quad y = \ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$

Практическое занятие 2

1. Найти производную показательно- степенной функции:

1. $y = (\sin x)^{\cos x}$ $\qquad$ 2. $y = \frac{\sin x^{\cos x} \sqrt[3]{\ln x^2}}{2^{tgx} \sqrt[4]{\arcsin x^3}}$

1. Вычислить пределы:

1. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ $\qquad$ 2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3}{e^x}$ $\qquad$ 3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$ $\qquad$ 4. $\lim\limits_{x \to +\frac{\pi}{2}} (\frac{1}{\cos x} - tgx)$

5. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$ 7. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2})$

Практическое занятие 3

1. Найти уравнение касательной и нормали к кривой, заданной функцией в точке

1. $y=x^3-2x^2+3, x_0=1$ 2. $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-4x,\ x_0=2$

3. $x^2+2xy^2+3y^4=6,\ M(-1,1)$ 4. $\begin{cases} y=t^3 \\ x=t^2 \end{cases}, t_0=2$

2. Найти угол пересечения двух кривыми, заданных функциями:

1. $y=x^2, x+y=2$ 2. $y=x, y=x^3$

3. Найти вторую производную функции: 1. $y=x^5$; 2. $y=(1+x^2)arctgx$

4. Найти все производные порядка n функции : 1. $y=x^n$; 2. $y=\frac{1}{1+x}$

5. Удовлетворяет ли функция $y=\frac{x^2e^x}{2}$ соотношению $y''-2y'+y=e^x$.

Практическое занятие 4

1. Найти дифференциал функции:

1. $y=10x+15$ 2. $y=\sqrt[3]{x^2}$ 3. $y=\frac{3^x}{x^3}$ 4. $y=x^2\cos 3x$

2. Приближенно вычислить:

1. $\sqrt[3]{70}$ 2. $tg46^\circ$ ($\frac{\pi}{180}\approx 0.01745$ - 1 градус) 3. $\sqrt[5]{32{,}001}$

Тема 2. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.

6 часов

Содержание

Практическое занятие 1

1. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{e^x}$ 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to+\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\cos x}-tgx)$ 3. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax^m)^{\frac{b}{x^n}}, m\succ 0, n\succ 0$

5. $\lim\limits_{x\to+0} x^x$ 6. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{\cos x}$ 7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$ 9. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ 10. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

11. $\lim\limits_{x\to 0} ctgx^{\sin x}$

2. Проверить справедливость теоремы Роля для функции для функции $y=f(x)=x^3-5x^2+6x$ на отрезке $[2,3]$.
3. Проверить справедливость теоремы Роля для функции для функции $y=4^{\sin x}$ на отрезке $[0,\pi]$.
4. Составить формулу Лагранжа для функции $y=x(1-\ln x)$ на отрезке от $[a,b]$.

Практическое занятие 2

Тренинг 1

Пример выполнения упражнения тренинга.

Задание

Исследовать функцию на возрастание, убывание, точки экстремума, если

y=x^3-3x+2.

Умение	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
	1) Найти область определения D(f)	1) D(f)=(-∞;+∞)
	2) Найти f'(x)	2) f'(x)=3x^2-3
Исследовать функцию на возрастание(↗), убывание(↘), экстремум	3) Найти корни уравнения $f'(x)=0$: x_1, x_2, x_3	3) 3x^2-3=0, 3(x^2-1)=0, 3(x-1)(x+1) =0, x_1= -1; x_2=1
	4) Заполнить таблицу	4)

x	$x<x_1$	x_1	$x>x_1$	…
y'	+ / -	0	- / +	…
y	↗ / ↘	max / min	↘ / ↗	…

x	$-\infty;-1$	-1	-1;1	1	$1;+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	**max**	↘	**min**	↗

	5) Найти y(x_1), y(x_2), y(x_3)	5) y(-1)= 4 — **max**, y(1)= 0 — **min**
	6) Записать ответ	6) y ↗ на $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ y ↘ на $(-1;1)$. y в т. x=-1 имеет **max** =y(-1) = 4 y в т. x= 1 имеет **min** =y(1) = 0

Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремум:

а) $y=\frac{2}{3}x^{3}-2x+1$ б) $y=x^{3}-9x^{2}+15x-3$

в) $y=\frac{x}{x^{2}+4}$ г) $y=3x+\frac{3}{x}+5$

д) $y=x\ln x$

Тренинг 2

Пример выполнения упражнения тренинга.

Задание

Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба, если

y=x³+15x²-x-250.

<table>
<tr><td rowspan="3">Умение</td><td>Алгоритм</td><td>Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму</td></tr>
<tr><td>1) Найти область определения D(f)</td><td>1) D(f)=(-∞;+∞)</td></tr>
<tr><td>2) Найти $f''(x)$</td><td>2) $f'(x)=3x^2+30x-1$
$f''(x)=6x+30$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Исследовать функциюна выпуклость(∩), вогнутость (∪), точки перегиба (тп)</td><td>3) Найти корни уравнения $f''(x)=0$: $x_1, x_2, \dots$</td><td>4) 6x+30=0, 6(x+5)=0,
x= -5</td></tr>
<tr><td>4) Заполнить таблицу</td><td>4)</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>x</td><td>$x<x_1$</td><td>x_1</td><td>$x>x_1$</td><td>…</td></tr><tr><td>y''</td><td>+</td><td>0</td><td>—</td><td>…</td></tr><tr><td>y</td><td>∪</td><td>тп</td><td>∩</td><td>…</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$-\infty;-5$</td><td>-5</td><td>-5;+∞</td></tr><tr><td>y''</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>∩</td><td>тп</td><td>∪</td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5) Найти $y(x_1)$, $y(x_2)$, …</td><td>5) y(-5)= 5</td></tr>
<tr><td>6) Записать ответ</td><td>6) График функции
выпуклый на $(-\infty;-5)$
вогнутый на $(-5;+\infty)$
точка $(-5;5)$ - точка перегиба</td></tr>
</table>

Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремум:

а) $y=x^{5}$ б) $y=\sqrt[3]{x-1}$

в) $y=2x^{3}-12x^{2}+18x$ г) $y=\frac{x}{x^{2}+16}$

д) $y = e^{-\frac{x^2}{4}}$ е) $y = \frac{x^2}{1-x^2}$

Практическое занятие 3

1. Найти наклонную асимптоту кривой $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x-1}$

2. Исследовать поведение функции $y = \frac{1}{x-2}$ и $y = \frac{1}{(x-2)^2}$ в окрестности точки $x_0 = 2$.

3. Исследовать функцию построить график:
   1. $y = x^2 - x^3$
   2. $y = x(1+\sqrt[4]{x})$
   3. $y = 1+\sqrt[4]{x}$
   4. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$
   5. $y = x^3 e^x$
   6. $y = x^3 - 4x + 2$
   7. $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2$ на отрезке $[a,b]$:
   1. $a = -1, b = 1$.
   2. $a = -2, b = 4$

5. <u>Дополнительные задания</u>
   1. $y = x^3 - 3x^2$
   2. $y = x(1+\sqrt{x})$
   3. $y = 1+\sqrt{x}$
   4. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$
   5. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$

Тренинг 1

Пример выполнения упражнения тренинга.

Задание

Исследовать функцию на возрастание, убывание, точки экстремума, если

$y=x^3-3x+2$.

Умение	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
	1) Найти область определения D(f)	1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$
	2) Найти $f'(x)$	2) $f'(x)=3x^2-3$

Исследовать функцию на возрастание(↗), убывание(↘), экстремум	3) Найти корни уравнения $f'(x)=0$: x_1,x_2,x_3	5) $3x^2-3=0$, $3(x^2-1)=0$, $3(x-1)(x+1)=0$ $x_1=-1$; $x_2=1$
	4) Заполнить таблицу	4)

x	x<x_1	x_1	x>x_1	…
y'	+ / -	0	- / +	…
y	↗ / ↘	**max** / **min**	↘ / ↗	…

x	$-\infty;-1$	-1	-1;1	1	$1;+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	**max**	↘	**min**	↗

	5) Найти $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3)$	5) y(-1)= 4 — **max**, y(1)= 0 — **min**
	6) Записать ответ	6) y ↗ на $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ y ↘ на $(-1;1)$. y в т. x=-1 имеет **max** =y(-1) = 4 y в т. x= 1 имеет **min** =y(1) = 0

Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремум:

а) $y=\frac{2}{3}x^3-2x+1$

б) $y=x^3-9x^2+15x-3$

в) $y=\frac{x}{x^2+4}$

г) $y=3x+\frac{3}{x}+5$

д) $y=x\ln x$

Тренинг 2

Пример выполнения упражнения тренинга.

Задание

Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба, если

$y=x^3+15x^2-x-250$.

Умение	**Алгоритм**	**Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму**
	1) Найти область определения D(f)	1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$
	2) Найти $f''(x)$	2) $f'(x)=3x^2+30x-1$ $f''(x)=6x+30$
Исследо-вать	3) Найти корни уравнения $f''(x)=0$: $x_1,x_2,\ldots$	6) $6x+30=0$, $6(x+5)=0$, x= -5
	4) Заполнить таблицу	4)

x	$x<x_1$	x_1	$x>x_1$	…	x	$-\infty;-5$	-5	-5;+∞
y''	+	0	—	…	y''	-	0	+
y	$\cup$	тп	$\cap$	…	y	$\cap$	тп	$\cup$

5) Найти $y(x_1)$, $y(x_2)$, …	5) y(-5)= 5
6) Записать ответ	6) График функции выпуклый на $(-\infty;-5)$ вогнутый на $(-5;+\infty)$ точка $(-5;5)$ - точка перегиба

Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремум:

а) $y=x^5$ б) $y=\sqrt[3]{x-1}$

в) $y=2x^3-12x^2+18x$ г) $y=\dfrac{x}{x^2+16}$

д) $y=e^{-\frac{x^2}{4}}$ е) $y=\dfrac{x^2}{1-x^2}$

Литература:

1. Баврин, И.И.Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с.

Раздел III. Ряды

Тема 1. Числовые ряды.

4 часа

Содержание

Практическое занятие 1

1. Дан общий член ряда $u_n=\dfrac{2^{n-1}}{n!}$. Записать первые четыре члена ряда.
2. Найти общий член ряда $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\ldots$
3. Найти общий член ряда $1+\dfrac{1\cdot4}{1\cdot4}+\dfrac{1\cdot4\cdot9}{1\cdot4\cdot7}+\dfrac{1\cdot4\cdot9\cdot16}{1\cdot4\cdot7\cdot10}+\ldots$
4. Исследовать частичную сумму ряда $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\ldots$

5. Исследовать частичную сумму ряда $2+6+18+\ldots+2\cdot 3^{n-1}+\ldots$
6. Исследовать частичную сумму ряда $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$
7. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 23}+\frac{1}{23\cdot 34}+\ldots+\frac{1}{(11n-10)(11n+1)}$
8. Исследовать сходимость ряда и вычислить сумму ряда, если он сходится $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\ldots$
9. Исследовать сходимость ряда $u_n=\frac{5n+1}{4n-1}$

Дополнительные задания

1. Найти общий член ряда $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\ldots$
2. Найти общий член ряда $\frac{2}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^2+\left(\frac{4}{11}\right)^2+\left(\frac{5}{15}\right)^4+\ldots$
3. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$
4. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$
5. Исследовать сходимость ряда и вычислить сумму ряда, если он сходится $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$
6. Исследовать сходимость ряда $u_n=\frac{n}{3n-1}$

Практическое занятие 2

1. Исследовать сходимость знакопеременного ряда:

а) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\ldots$ б) $u_n=\frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$

2. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

а) $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{5n+6}$ б) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{10n+9}$

3. Сколько членов n ряда $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ необходимо взять, чтобы вычислить ряд, причем с точностью до 0,001?

4. Исследовать на сходимость ряд:

1. $\frac{1}{1\cdot 2^2}-\frac{1}{2\cdot 3^2}+\frac{1}{3\cdot 4^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)^2}-\ldots$
2. $\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\ldots$

5. Оценить третий остаток ряда (двумя способами):

$$\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5^2}+\frac{1}{4\cdot 5^3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot 5^n}+\ldots$$

7. Вычислить с точностью до $0,01$ сумму ряда:

$$\frac{1}{1!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}+\ldots$$

Дополнительные задания

1. Исследовать сходимость знакопеременного ряда $u_n=1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\ldots$

2. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

а) $u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ б) $u_n=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n+1)}{(n^3+1)}$

в) $u_n=(-1)^n\left(\frac{3n+1}{2n+1}\right)^n$

ё) $u_n=(-1)^n\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\ldots(2n+5)}$ к) $u_n=(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)$

л) $u_n=\frac{(-1)^n n}{2^n}$

3. Сколько членов ряда $u_n=\frac{n}{(2n+1)\cdot 5^n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

4. Оценить второй остаток r_2 ряда $u_n=\frac{\cos 5n}{5^n+1}$

Тема 2. Функциональные ряды.

4 часа

Содержание

Практическое занятие 1

1. Определить область сходимости функционального ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(x+3)^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}n\sqrt[3]{\cos^n x}$

2. Определить радиус, интервал и область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{4^n}$

3. Исследовать сходимость функционального ряда:

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+2}\left(\frac{5-x}{8x-3}\right)^n$ в точках $x=0, x=1$.

4. Определить область сходимости ряда:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n2^n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}n!x^n$

г) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n$ д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^n}$ е) $\sum_{n=1}^{\infty}n!(x+5)^n$

Дополнительные задания

1. Исследовать сходимость функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n$ в точках $x=0, x=1$.
2. Определить область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{4-x}{7x+2}\right)^n$.
3. Определить радиус, интервал и область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(n\cdot x)^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}$

Практическое занятие 2

1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$ (заменить $e^x, \sin x$ их представлениями по формуле Маклорена и вычислить с точностью до величины $O(x^3)$).
2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x(1+x)^m}{x^2}$ (заменить $(1+x)^m, \ln(1+x)$ их представлениями по формуле Маклорена).
3. Вычислить приближенное значение $\sqrt[3]{e}$, взяв три члена представления функции $f(x)=e^x$ по формуле Маклорена, и оценить ошибку вычисления.
4. Вычислить приближенное значение $\frac{1}{\sqrt[3]{e^x}}$, взяв три члена представления функции $f(x)=e^x$ по формуле Маклорена, и оценить ошибку вычисления.
5. Вычислить $\sin 18^\circ$ с точностью до 10^{-4} (подставить $18^\circ=\frac{\pi}{10}=0{,}314159$ вместо x в ряд).
6. Вычислить $\sqrt[3]{70}$ с точность до 10^{-4}.
7. Вычислить $\ln 5$ с точностью до 10^{-3} (воспользоваться разложением $\ln\frac{1+x}{1-x}$, положив $\frac{1+x}{1-x}=5$, откуда $x=\frac{2}{3}$).

Дополнительные задания:

1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{e^x-1-x}$
2. Вычислить приближенно $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ с точностью до 10^{-4}.
3. Вычислить $\sqrt[5]{250}$ с точностью до 10^{-3}.
4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x}$.

5. Вычислить $\cos 1^\circ$ с точностью до 10^{-3}.
6. Вычислить $\ln 6$ с точностью до 10^{-4}.

Литература:

1. Баврин, И.И.Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с.
3. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др. - 2-е изд., перераб.и доп. - М. : Физматлит. - Т.3: Интегралы, ряды. – 2003. - 502 с.

РАЗДЕЛ IV. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

Тема 1. Неопределенный интеграл.

8 часов

Содержание

Практическое занятие 1

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{2+3\sqrt[3]{x^2}+5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx$	11. $\int tg^2 x dx$	***Метод замены:***
2. $\int \frac{x^2}{15+x^2}dx \;\left\|\pm 1\right\|$	12. $\int (x-1)^2 x\cdot\sqrt[4]{x}dx$	21. $\int \sin(3x+5)dx$
3. $\int \frac{dx}{x^4+x^2} = \left\|\pm x^2\right\|$	13. $\int \frac{xe^x-x}{x}dx$	22. $\int e^{x^3}x^2 dx$
4. $\int \frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}dx$	14.* $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}dx$	***Метод по частям:***
5. $\int \frac{\cos^3 x-\sin x\cos^2 x+1}{\cos^2 x}dx$	15. $\int a^x e^x dx$	23. $\int \underset{u}{\underline{\ln x}}\,dx$
6. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx$	16. $\int \frac{dx}{\cos 2x+\sin^2 x}$	24. $\int \underset{u}{\underline{x}}\cdot e^{2x}dx$
7. $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx$	17. $\int \frac{2x\sin^2 x+1}{\sin^2 x}dx$	25. $\int \underset{u}{\underline{arctgx}}\,dx$
8. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$	18. $\int \frac{x\sin 2x+\sqrt[3]{x}\cos x}{x\cos x}dx$	
9. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$	19. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}dx$	
10. $\int (2^x+3^x)^2 dx$	20. $\int \frac{x^2+5x+6}{x+3}dx$	

Практическое занятие 2

Найти неопределенные интегралы:

1) $\int \frac{dx}{x-5}$; 2) $\int \frac{dx}{(x+2)^4}$; 3) $\int \frac{xdx}{5x^2+2x+4}$; 4) $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

5) $\int \frac{x+3}{x^2+4x+29}dx$; 6) $\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx$; 7) $\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx$.

8) $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+30x-22}{x^3-x^2-8x+12}dx$; 9) $\int \frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$.

10) $\int \frac{x^2-5x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}dx$; 11) $\int \frac{2x+2}{(x-1)(x^2+1)^2}dx$; 12) $\int \frac{dx}{(x^3-1)^2}$;

13) $\int \frac{8x^3-2x^2+13x-2}{(x^2+2)(x^2+1)}dx$; 14) $\int \frac{3x^4+14x^2+7x+15}{(x+3)(x^2+2)^2}dx$;

15) $\int \frac{9x^3-30x^2+28x-88}{(x^2-6x+8)(x^2+4)}dx$; 16) $\int \frac{8x^3-12x^2+2x+10}{(x+3)(x-1)^3}dx$.

Практическое занятие 3

1. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+1)^3}dx$ (подстановка $\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'=t$).
2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(\sqrt{5+2x+x^2})^3}$ (подстановка $\frac{1}{2}(ax^2+bx+c)'=t$).
3. Вычислить интеграл $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}dx$ (интеграл вида $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$).
4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}$ (если подынтегральная функция является рациональной функцией относительно $(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p}{q}}$, $(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}$ и т.д., где $p,q,s,r\ldots$- целые числа, то интеграл рационализируется подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=t^n$, где n- наименьшее кратное чисел $q,s,\ldots$.).
5. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt{x-2}}dx$ (если подынтегральное выражение содержит лишь линейную иррациональность $\sqrt[n]{ax+b}, a\neq 0$, то полезна подстановка $t=\sqrt[n]{ax+b}$).
6. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}}dx$.
7. Найти интеграл $\int \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx$.
8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$ (свести интеграл к типу $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$).

9. Найти интеграл $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{2\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}+7}}$.
10. Найти интеграл $\int \frac{(3\boldsymbol{x}-7)}{\sqrt{5\boldsymbol{x}^2+8\boldsymbol{x}+1}}\boldsymbol{dx}$.
11. Найти интеграл $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}\sqrt{\boldsymbol{x}^2+3}}$ (замена $\boldsymbol{x}=\frac{1}{\boldsymbol{t}}$).
12. Найти интеграл $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x}^2\sqrt{7-\boldsymbol{x}^2}}$.
13. Найти интеграл $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{(\boldsymbol{x}^2+9)\sqrt{\boldsymbol{x}^2+9}}$.

Практическое занятие 4

1. Вычислить интегралы: 1) $\boldsymbol{I}=\int \cos 3\boldsymbol{x}\cos 9\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx}$; 2) $\boldsymbol{I}=\int \sin 2\boldsymbol{x}\cos 5\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx}$.
2. Вычислить интеграл: $\boldsymbol{I}=\int \sin 10\boldsymbol{x}\cdot\cos 7\boldsymbol{x}\cdot\cos 4\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx}=\int \sin 10\boldsymbol{x}[\cos 7\boldsymbol{x}\cdot\cos 4\boldsymbol{x}]\cdot\boldsymbol{dx}$ (*воспользоваться формулами дважды).*
3. Найти интеграл $\boldsymbol{I}=\int \sin^2\boldsymbol{x}\cos^7\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx}$ *(один показатель нечетное число: замена* $\boldsymbol{t}=\sin\boldsymbol{x}$ *и понизить степень).*
4. Найти интеграл $\boldsymbol{I}=\int \frac{\sin^7\boldsymbol{x}}{\sqrt{\cos\boldsymbol{x}}}\boldsymbol{dx}$ *(замена переменной* $\cos\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}$ *).*
5. Найти интеграл $\boldsymbol{I}=\int \cos^4\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx}$ *(показатели четные положительные числа, один может равняться нулю: понизить степень* $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$).
6. Найти интеграл $\boldsymbol{I}=\int \cos^2 3\boldsymbol{x}\sin^4\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx}=\int [\cos 3\boldsymbol{x}\sin 3\boldsymbol{x}]^2\sin^2\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx}$.
7. Найти интеграл $\int \boldsymbol{tg}^8\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx}$ (*1 способ: использование формулы* $tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}-1$ *и понижение показатель степени* n *на две единицы; 2 способ: использование подстановки:* $tgx=t$, $x=arctgt$ *и* $dx=\frac{dt}{1+t^2}$ *.)*
8. Найти интеграл $\int \boldsymbol{ctg}^5\boldsymbol{x}\boldsymbol{dx}$.
9. $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sin^3\boldsymbol{x}}$ *(универсальная подстановка)*
10. Найти интеграл $\int \frac{5+6\sin\boldsymbol{x}}{\sin\boldsymbol{x}(4+3\cos\boldsymbol{x})}\boldsymbol{dx}$ *(универсальная подстановка)*

Тема 2. Определенный интеграл.

2 часа

Содержание

Практическое занятие

1. Составить формулу для вычисления интегральных сумм для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке [a;b], разделяя этот отрезок на n равных элементарных отрезков и взяв в качестве внутренней точки ξ_i правый конец каждого отрезка.
2. Вычислить интеграл $\int_a^b xdx$ (a<b), как предел интегральной суммы.
3. Составить формулу для вычисления интегральных сумм для функции $f(x)$, непрерывной на отрезке [a;b], разделяя этот отрезок на n равных элементарных отрезков и взяв в качестве внутренней точки ξ_i левый конец каждого отрезка.
4. Составить формулу для вычисления интегральных сумм для функции $y = e^x$ на отрезке [a;b], разделяя его на n равных отрезков и взяв в качестве внутренней точки ξ_i правый конец каждого отрезка.
5. Вычислить $\int_a^b xdx$, составив интегральную сумму для функции f(x)= x. Отрезок [a;b] разделить на n частей произвольным образом. В качестве внутренней точки ξ_i взять середину каждого частичного отрезка.
6. Найти $I = \int_0^1 (x-2)^3 dx$.
7. Найти $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$.
8. Найти $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2-4}$.
9. $I = \int_1^9 \frac{\sqrt{x}dx}{x+2\sqrt{x}}$.
10. $I = \int_3^{10} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x+6}}$.
11. Вычислить интеграл $I = \int_0^{2a} \sqrt{2ax - x^2}dx$.
12. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 x \cdot e^x dx$.
13. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 x \cdot arctgx dx$.
14. Вычислить интеграл $I = \int_0^1 \arcsin x dx$.
15. Вычислить интеграл $I = \int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx$.

Тема 3. Приложения определенного интеграла.

2 часа

Содержание

Практическое занятие

1. Найти площадь, ограниченную графиками функций $y = 2\sqrt{x}$ и $y = 2x$.

2. Найти площадь, ограниченную эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$
3. Найти площадь одного лепестка четырехлепестковой розы $r = a\sin 2\varphi$.
4. Найти объем тела вращения, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{x}$ и $y = 2x$ вокруг осей Ox и Oy.
5. Вычислить поверхность сферы, радиуса R, рассматривая ее как тело вращения.
6. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ $\left(x \in \left[1, \sqrt{3}\right]\right)$.
7. Найти длину окружности радиуса R, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t. \end{cases}$
8. К телу прикреплена пружина, другой конец которой закреплен неподвижно в точке O. Упругая сила, с которой действует пружина на тело, подчиняется закону Гука, согласно которому $F = -kx$, где k - коэффициент пропорциональности, а x - удлинение пружины. Найти работу упругой силы при прямолинейном перемещении по линии действия силы от $x = a$ до $x = b$.
9. Вычислить интегралы: 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{arctg^2 x dx}{1+x^2}$ **;** **2)** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{arctg x dx}{1+x^2}$; 3) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ **;** **4)** $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x-1}$; 5) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x-1}$; 6) $\int\limits_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$; 7) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2}$

Литература:

1. Баврин, И.И.Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с.
3. Якшина, А.С. Приложения определенного интеграла при решении геометрических и физических задач: Учебное пособие / А.С. Якшина.- Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2014.(21)

РАЗДЕЛ V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Тема 1. Функции нескольких переменных.

2 часа

Содержание

Практическое занятие

1. Найти и изобразить на плоскости Oxy область определения функции:

   1) $z = \frac{1}{\sqrt{\arcsin(1-x^2)}}$; 2) $\boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2-4}$; 3) $\boldsymbol{z} = \frac{5}{3-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}$;

   4) $\boldsymbol{z} = \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2-2\boldsymbol{y}-2}}$; 5) $\boldsymbol{z} = \lg(\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2+8)$; 6) $\boldsymbol{z} = \sqrt{4-\boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{y}^2}$.

2. Найти область определения данной функции трех переменных:

   1) $\boldsymbol{u} = \sqrt{\boldsymbol{x}^2+9\boldsymbol{y}^2+18\boldsymbol{y}+9-\boldsymbol{z}}$; 2) $\lg(4\boldsymbol{x}^2+8\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2-2\boldsymbol{y}+5-4\boldsymbol{z})$;

   3) $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}-1}} - \frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{y}+2\boldsymbol{x}+1}}$.

3. Найти и построить линии уровня функции: 1) $z = 4x^2 - \frac{y^2}{9}$; 2)$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^2 + 6\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^2 + 9$; 3) $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^2 + 9\boldsymbol{y}^2 + 18$.
4. Найти предел функции:1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{arctg6(x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}$.
5. Найти все частные производные первого порядка функции: 1) $z = \sqrt{x^2 - 3y^2}$;
   2) $\boldsymbol{z} = \log_2(3\sqrt[3]{\boldsymbol{x}} + 2\boldsymbol{y}^2)$; 3) $u = \arccos\sqrt{y^2 - x^2 + 3z}$; 4) $z = y \cdot x^y$;
   5) $z = \frac{4}{\sqrt{5 - xy}}$; 6) $z = 2^{\cos\frac{t}{s}}$; 7) $z = \arcsin\frac{y}{x}$; 8) $z = \ln tg\frac{y}{x}$; 9) $z = y^x$;
   10) $z = x^y$; 11) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$; 12) $z = \sin\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x}$.
6. Найти все частные производные второго порядка, предварительно найдя и упростив производные первого порядка: 1) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; 2) $z = \log_3(x - y^2)$.
7. Найти точки разрыва функции $z = \frac{1}{x - y + 1}$.

Тема 2. Дифференцируемые функции.

2 часа

Содержание

Практическое занятие

1. Для функции найти полное приращение Δz и полный дифференциал dz для данной функции в точке $M(x, y)$ для заданных Δx и Δy и сравните их.
   1. $z = xy^2$; $M(2,1)$; $\Delta x = 0{,}2$; $\Delta y = 0{,}1$.
   2. $z = x^2 y$; $M(1,2)$; $\Delta x = 0{,}05$; $\Delta y = 0{,}1$.
   3. $z = x^2 y^2$; $M(1,1)$; $\Delta x = 0{,}01$; $\Delta y = 0{,}02$.
2. Найти полный дифференциал dz данной функции.
   1. $z = x^3 y^2$; 2. $z = xy^x$; 3. $u = xyz$; 4. $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ 5. $z = \ln tg\frac{x}{y}$
3. Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядка функции.
   1. $z = x^2 - 3xy - 2y^2$; 2. $z = e^{xy}$ 3. $z = xe^y + ye^x$ 4. $z = e^y \sin x$
4. Вычислить приближенно без использования калькулятора. При переводе градусов в радианы и при всех вычислениях брать три значащих цифры, в ответе последний знак округлить.
   1. $1{,}01^2 \cdot 0{,}98^3$; 2. $0{,}99^3 \cdot 1{,}02^2$; 3. ; $\sqrt{3{,}98 + 2{,}95}$; 4. $\sin 31^\circ \cdot \cos 61^\circ$.
5. Найти $\frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dx}} \cdot \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} + \frac{\boldsymbol{dz}}{\boldsymbol{dy}} \cdot \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dt}}$, если: 1. $z = \sqrt{3x - 5y}$, где $x = \sin t$, $y = \sqrt{t}$;
   2. $z = \frac{y}{x}$, где $x = \ln t$, $y = \arcsin t$
6. Найти $\frac{du}{dt}$, если $u = \frac{xy}{z}$, где $x = \sqrt{t+2}$, $y = e^t$, $z = \cos t$.

Тема 3. Экстремумы функции нескольких переменных.

2 часа

Содержание

Практическое занятие

1. Найти экстремумы функции $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 3y$.
2. Исследовать на экстремум функции: 1. $z = y^3 + 3x^2 y - 12x - 15y$; 2. $z = 2x^2 + (y-1)^2$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{xy} + \boldsymbol{y}^2 - 4\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$ в области $\boldsymbol{x} \geq 0,\ \boldsymbol{y} \geq 0,\ 3\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} - 12 \leq 0$.
4. Исследовать на экстремум функции: 1. $z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$; 2. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$; 3. $z = y^2 - 2x^2 - 2y + 1$.

Литература:

1. Баврин, И.И.Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с.
3. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др. - 2-е изд., перераб.и доп. - М. : Физматлит. - Т.3: Функции нескольких переменных. – 2003. - 468 с.

РАЗДЕЛ VI. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Тема 1. Двойной и тройной интегралы.

6 часов

Содержание

Практическое занятие 1

1.Вычислить:

1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 (x^2 + 3y^2)dy$ 2. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy$ 3. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x\sqrt{3}} xydy$

2. Найти и построить область интегрирования:

1. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$ 2. $\int\limits_{-4}^3 dx \int\limits_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$ 3. $\int\limits_{-2}^0 dy \int\limits_{y^2-4}^{0} f(x,y)dx$

3. Изменить порядок интегрирования в интеграле:

1. $\int\limits_1^3 dx \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x,y)dy$ 2. $\int\limits_{-4}^3 dx \int\limits_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$ 3. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dy$

4. Изменить порядок интегрирования:

1. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x,y)dy$

2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$

Практическое занятие 2

1. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy$.
2. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования: $\iint\limits_S f(x,y)dxdy$, $S:\ y \ge x,\ y \ge -x,\ y \le 1$.
3. Вычислить $\iint\limits_S \ln(x^2+y^2)ds$, если области интегрирования S - кольцо между окружностями $x^2+y^2=e^2$ и $x^2+y^2=e^4$.
4. Вычислить $\iint\limits_S r\sin\varphi drd\varphi$, $S: r \le a, \varphi \ge \dfrac{\pi}{2}, \varphi \le \pi$.
5. Вычислить $\iint\limits_S r\sin\varphi drd\varphi$, $S: r \ge 1, r \le 2+\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \pi$.
6. Вычислить $\iint\limits_S r^2 drd\varphi$, если ограничена первым завитком спирали $r = a\varphi$ и осью Ox.
7. Преобразовать к полярным координатам и вычислить $\iint\limits_S e^{-x^2-y^2}dxdy$, S: $x^2+y^2 \le a^2$.

Практическое занятие 3

1. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{1-x-y}$, если V - тетраэдр с вершинами $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$.
2. Вычислить $\iiint\limits_V x^3y^2zdxdydz$, где V определяется неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$ $0 \le z \le xy$. Примечание: Использовать метод параллельных сечений. В плоскости $\boldsymbol{x}=1$ получается треугольник с вершинами в точках $\boldsymbol{A}(1;0;0)$, $\boldsymbol{B}(1;1;0)$, $\boldsymbol{C}(1;1;1)$, в плоскости $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$ - криволинейный треугольник $\boldsymbol{OBC}$, у которого стороны ОВ и ВС –отрезки прямых, а сторона ОС – параболы $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}^2$. Участок поверхности АОС определяется уравнением $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{xy}$.
3. Вычислить $\iiint \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, V ограничена плоскостями $y=0$, $z=0$, $z=2$ и цилиндром $x^2+y^2=2x$.
4. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2+2z)dxdydz$, $V: x^2+y^2 \le 1,\ z \ge 1-x^2-y^2,\ z \le 1$. Примечание: Область интегрирования расположена внутри цилиндра $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2 \le 1$, ниже плоскости $\boldsymbol{z}=1$ и выше параболоида вращения $\boldsymbol{z}=1-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2$, который пересекается с цилиндром $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=1$ в плоскости $\boldsymbol{XOY}$ и имеет вершину на оси $\boldsymbol{OZ}$ в точке $\boldsymbol{z}=1$.
5. Вычислить $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, где V является $\dfrac{1}{8}$ частью шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$, расположенной в 1-ом октанте. Примечание: перейти к сферическим координатам.

6. Вычислить $\iiint\limits_V \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\,dxdydz$, где V шар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Тема 2. Некоторые применения кратных интегралов.

2 часа

Содержание

Практическое занятие

8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями: $y=x^2$, $y=1$, $x+y+z==4$, $2x+y+z=3$. Примечание: Тело ограничено сбоку частью цилиндрической поверхности $y=x^2$, частью плоскости $y=1$, сверху частью плоскости $z_в=4-x-y$, снизу частью плоскости $z_н=3-2x-y$. Проекция тела на плоскость XOY является область S, ограниченная прямой $y=1$ и параболой $y=x^2$.
9. Найти площадь S, ограниченную линиями $y=e^x$, $y=e^{-2x}$, $y=e^2$.
10. Найти объем части шара радиуса R, вырезанной из него прямым круговым цилиндром диаметром R, образующая которого проходит через центр шара. Примечание: Совместить начало координат с центром шара, ось Oz направить по образующей цилиндра, а ось Ox вдоль диаметра цилиндра. Вычисление целесообразно провести в полярных координатах.
11. Вычислить площадь части параболоида вращения $z=x^2+y^2$, вырезаемую цилиндром $x^2+y^2=4$.
12. Найти массу кругового кольца, если поверхностная плотность γ в каждой точке обратно пропорциональна квадрату расстояния ее от центра кольца.
13. Найти координаты центра тяжести пластины, ограниченной линиями $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$. Поверхностная плотность γ постоянна.
14. Вычислить моменты инерции относительно осей координат пластины, определяемой условиями предыдущего примера.

Тема 3. Криволинейные интегралы.

2 часа

Содержание

Практическое занятие

1. Вычислить интеграл $I=\int\limits_L xydx+(x+y)dy$, принимая за линию L:
   - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0{,}0)$ и $A(1{,}1)$
   - дугу параболы $y=x^2$, соединяющая эти же точки
   - ломаную OBA, $B(1{,}0)$.
2. Вычислить интеграл $I=\int\limits_L xydx$, где L дуга параболы $x=y^2$, соединяющая точки $A(1,-1)$ и $B(1{,}1)$
3. Вычислить интеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx+x^2dy$

4. Вычислить интеграл $\int\limits_L yds$, где L - дуга параболы $y = x^2$ от точки $O(0,0)$ до точки (4,16)
5. Найти площадь Q боковой поверхности половины эллиптического цилиндра $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, усеченного плоскостью $z = y$.
6. Найти площадь забора, построенного на периферии К квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, высота которого в точке $(x, y) \in K$ равна $z = x^2 + y^2$.
7. Определить массу окружности $x^2 + y^2 = R^2$, если ее плотность в точке (x, y) равна $\rho = \frac{y^2}{R^2}$
8. Определить координаты центра масс $C(x_0, y_0)$ однородной полуокружности K: $x^2 + y^2 = R^2$, $y \ge 0$. Указание: Координаты центра масс однородной кривой K выражается формулами $x_0 = \frac{1}{L}\int\limits_K xds$, $y_0 = \frac{1}{L}\int\limits_K yds$, где L - длина дуги кривой.
9. Найти момент инерции I_y дуги полукубической параболы $y = x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \le x \le \frac{4}{3}$) относительно оси Oy. Указание: $I_y = \int\limits_K x^2 ds$.
10. Найти момент инерции I_x арки циклоиды K: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ относительно оси Ox. Указание: $I_x = \int\limits_K y^2 ds$.
11. Найти работу силы с проекциями $X = y$, $Y = -x$ вдоль эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.
12. Найти работу силы $F = \{-kx, -ky\}$ при перемещении ее точки приложения из $M_1(a,0)$ в $M_2(0,b)$.
13. Найти работу силы с проекциями $X = \sin(x + y)$, $Y = 0$ вдоль контура треугольника с вершинами $O(o,o)$, $M(\frac{\pi}{2},0)$, $N(0,\frac{\pi}{2})$ при обходе его против хода часовой стрелки.

Литература:

1. Баврин, И.И.Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с.
3. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др. - 2-е изд., перераб.и доп. - М. : Физматлит. - Т.3: Функции нескольких переменных. – 2003. - 468 с.

РАЗДЕЛ VII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка.

4 часа

Содержание

Практическое занятие 1

1. Проверить, является ли решением дифференциальных уравнений указанные функции:
   1) $y'' + y = 0$, $y = \sin x$;
   2) $y'' = x^2 + y^2$, $y = \frac{1}{x}$.
2. Методом изоклин построить поле интегральных кривых уравнения $y' = x$.
3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
   1) $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$;
   2) $y'tgx = y$;
   3) $\frac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.
4. Найти общее решение уравнения $(y-x)ydx + x^2dy = 0$.
5. Найти частное решение уравнения $2xyy' = x^2 + y^2$, при $y(1) = 2$.

Практическое занятие 2

1. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4$
2. Решить линейные дифференциальные уравнения:1) $xy' = x^3 + y$ 2) $(x+y^2)y' = 1$.
3. Найти частное решение уравнения $y' - ytgx = \frac{1}{\cos x}$, при $y(0) = 0$.
4. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$.
5. Найти общее решение уравнения $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$
6. Найти общее решение уравнения $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$.
7. Найти общее решение уравнение $(x + \sin y)dx + (x\cos y + \sin y)dy = 0$.

Тема 2. Дифференциальные уравнения высших порядков.

2 часа

Содержание

Практическое занятие

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

1. Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{1}{x}$
2. Найти частное решение уравнения $y'' = \frac{1}{a}\sqrt{1+(y')^2}$, при $y(0) = a$, $y'(0) = 0$
3. Найти частное решение уравнения $yy'' + y'^2 = y'^3$, при $y(0) = 1, y'(0) = 1$.
4. Найти общее решение уравнения $y'' = \sin x$.
5. Найти частное решение уравнения $y'' = xe^{-x}$, при $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

6. Найти общее решение уравнения $xy'' + y' = 0$.
7. Найти частное решение уравнения $xy'' - y' = x^2 e^x$, при $y(0) = -1, y'(0) = 0$.
8. Найти общее решение уравнения $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$.
9. Найти частное решение уравнения $y'' = y'^2 - y$, при $y(1) = -\frac{1}{4}, y'(1) = \frac{1}{2}$.

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

1. Найти общее решение $y'' - 4y' + 4y = 0$.
2. Найти общее решение $y'' - \frac{y'}{x} = x$.
3. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$ методом вариации произвольной постоянной.
4. найти общее решение уравнения $y'' + 4y' = 2x - 3$ методом неопределенных коэффициентов.
5. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = x^2$
6. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' - 3y = (2x - 3)e^{-x}$.
7. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$.
8. Найти общее решение уравнения $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$.

Литература:

1. Баврин, И.И.Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с.
3. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др. - 2-е изд., перераб.и доп. - М. : Физматлит. - Т.3: Функции нескольких переменных. – 2003. - 468 с.
4. Сёмочкина, О.А. Дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью специального вида : Учебное пособие / О.А.Сёмочкина.- Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2009.
5.

6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
ОПК-1	Собеседование	Низкий (неудовлетворительно)	Студент отвечает неправильно, нечетко и неубедительно, дает неверные формулировки, в ответе отсутствует какое-либо представление о вопросе
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент отвечает неконкретно, слабо аргументировано и не убедительно,

			хотя и имеется какое-то представление о вопросе
		Базовый (хорошо)	Студент отвечает в целом правильно, но недостаточно полно, четко и убедительно
		Высокий (отлично)	Ставится, если продемонстрированы знание вопроса и самостоятельность мышления, ответ соответствует требованиям правильности, полноты и аргументированности.
ОПК-1	Самостоятельная работа	Низкий (неудовлетворительно)	1. Студент допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3»; 2. или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил: 1. не более двух грубых ошибок; 2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета; 3. или не более двух-трех негрубых ошибок; 4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов; 5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
		Базовый (хорошо)	Студент выполнил работу полностью, но допустил в ней: 1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета; 2. или не более двух недочетов.
		Высокий (отлично)	Студент: 1. выполнил работу без ошибок и недочетов; 2. допустил не более одного недочета.
ОПК-1	Устный ответ	Низкий (неудовлетворительно)	Студент обнаруживает незнание большей части соответствующего вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «2» отмечает такие недостатки в подготовке, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

		Пороговый (удовлетворительно)	Студент обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но: 1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.
		Базовый (хорошо)	Студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «5», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.
		Высокий (отлично)	Студент: 1) полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий; 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные; 3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.
ОПК-1	Тест	Низкий (неудовлетворительно)	Количество правильных ответов на вопросы теста менее 60 %
		Пороговый (удовлетворительно)	Количество правильных ответов на вопросы теста от 61-75 %
		Базовый (хорошо)	Количество правильных ответов на вопросы теста от 76-84 %
		Высокий (отлично)	Количество правильных ответов на вопросы теста от 85-100 %
ОПК-1	Индивидуальное задание	Низкий (неудовлетворительно)	Ответ студенту не зачитывается если: • Задание выполнено менее, чем на половину; • Студент обнаруживает незнание большей части соответствующего материала, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно излагает материал.
		Пороговый (удовлетворительно)	Задание выполнено более, чем на половину. Студент обнаруживает знание и

			понимание основных положений задания, но: • Излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий; • Не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; • Излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.
		Базовый (хорошо)	Задание в основном выполнено. Ответы правильные, но: • В ответе допущены малозначительные ошибки и недостаточно полно раскрыто содержание вопроса; • Не приведены иллюстрирующие примеры, недостаточно чётко выражено обобщающие мнение студента; • Допущено 1-2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.
		Высокий (отлично)	Задание выполнено в максимальном объеме. Ответы полные и правильные. • Студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий; • Обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры; • Излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт/экзамен.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

Критерии оценивания устного ответа на зачете

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если:

- выполнены все контрольные мероприятия из фонда оценочных средств по разделу;
- даны полные обоснованные ответы на два пункта билета.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если:

- не выполнены контрольные мероприятия из фонда оценочных средств по разделу:

или

- не представлены верные обоснованные ответы на два пункта билета.

Критерии оценивания устного ответа на экзамене

Оценка 5 (отлично) ставится, если:

- студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;
- обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике;
- излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка;
- практическая часть экзаменационного билета выполнена в полном объеме.

Оценка 4 (хорошо) ставится, если:

- студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «5», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет;
- 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

Оценка 3 (удовлетворительно) ставится, если:

- студент обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы;
- излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
- не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
- излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

Оценка 2 (неудовлетворительно) ставится, если:

- студент обнаруживает незнание большей части соответствующего вопроса;
- допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал.

6.3 Оценочные средства для проверки уровня сформированности компетенции ОПК-1

Тест содержит следующие типы заданий

Тип задания	№ задания	Вес задания (балл)	Результат оценивания (баллы, полученные за выполнение задания / характеристика правильности ответа)
задания закрытого типа с выбором одного правильного (1 из 4)	1, 2, 3	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором одного правильного ответа по схеме: «верно»/ «неверно»	4, 5	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором нескольких правильных ответов (3 из 6)	6, 7	2 балла	2 б – полное правильное соответствие (последовательность вариантов ответа может быть любой); 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи

задания закрытого типа на установление соответствия (4 на 4)	8, 9	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задание закрытого типа на установление последовательности	10, 11	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задания открытого типа с кратким ответом	12, 13,	3 балла	3 б – полное правильное соответствие; 0 б – остальные случаи.
задания открытого типа с развернутым ответом	14, 15	5 баллов	5 б – полное правильное соответствие; если допущена одна ошибка/неточность / ответ правильный, но не полный - 3 балла; если допущено более одной ошибки / ответ неправильный / ответ отсутствует – 0 баллов

Формируемая компетенция	Индикаторы сформированности компетенции
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	• ИД-1опк-1-знать: основы математики, физики, вычислительной техники и программирования; • ИД-2опк-1-уметь: решать стандартные профессиональные задачи с применением естественнонаучных и общеинженерных знаний, методов математического анализа и моделирования; • ИД-3опк-1-иметь навыки: теоретического и экспериментального исследования объектов профессиональной деятельности.

Задание 1

Специалист по анализу данных моделирует процесс охлаждения нового серверного оборудования. Температура процессора *T* (в °C) после выключения системы в момент времени $t \geq 0$ (в минутах) описывается функцией: $T(t) = 25 + \frac{75}{1+t^2}$. Требуется оценить, к какой температуре будет стабильно стремиться процессор при неограниченном увеличении времени остывания, чтобы выбрать оптимальный алгоритм термоконтроля для последующего включения. Какой математический метод является наиболее обоснованным и эффективным для решения этой профессиональной задачи?

Варианты ответов:

1. Найти предел функции $T(t)$ при $t \to +\infty$, так как это позволяет определить установившееся значение температуры (температуру окружающей среды), которое является ключевым параметром для алгоритма.
2. Вычислить производную $T'(t)$, чтобы найти момент времени, когда скорость охлаждения будет максимальной.
3. Решить уравнение $T(t) = 40$, чтобы определить точное время, когда процессор охладится до 40°C.
4. Найти вторую производную $T''(t)$, чтобы исследовать выпуклость графика функции охлаждения.

Ответ: 1.

Задание 2

При моделировании поведения одного из алгоритмов сортировки было установлено, что время его работы T (в микросекундах) в зависимости от размера входных данных n (количество элементов) на определённом интервале описывается функцией: $T(n) = 0{,}01n^2 + 50n + 1000$, $n > 0$. Для анализа эффективности алгоритма при больших n и сравнения его с другими необходимо понять, как ведёт себя скорость роста времени выполнения. Какой математический аппарат и конкретный расчёт являются наиболее обоснованными для количественной оценки скорости роста времени работы этого алгоритма?
Варианты ответов:

1. Вычислить вторую производную $T''(n) = 0{,}02$. Её постоянное положительное значение показывает, что рост времени выполнения является ускоренным.
2. Найти производную $T'(n) = 0{,}02n + 50$. Проанализировать её значение, например, при $n = 1000$: $T'(1000) = 70$. Это означает, что при обработке 1000 элементов скорость увеличения времени работы составляет ~70 мкс на один дополнительный элемент, что количественно характеризует скорость роста.
3. Найти предел отношения $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n^2} = 0{,}01$. Это доказывает, что алгоритм имеет квадратичную асимптотическую сложность $O(n^2)$.
4. Решить уравнение $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right)$, чтобы найти точку, где время работы алгоритма удваивается.

Ответ: 2.

Задание 3

В задаче моделирования нагрузки на серверную ферму аналитик установил, что скорость поступления запросов $v(t)$ (запросов в секунду) изменяется во времени t (в секундах) на отрезке $[0; 60]$ по закону: $v(t) = 100 + 10\sin\frac{\pi t}{30}$. Для планирования вычислительных мощностей и оценки производительности системы необходимо найти общее количество запросов $\boldsymbol{N}$, обработанных сервером за первую минуту (на отрезке от t=0 до t=60). Какой математический метод и расчёт являются наиболее обоснованными и эффективными для точного решения этой профессиональной задачи?
Варианты ответов:

1. Найти среднее значение функции $v(t)$ на отрезке $[0; 60]$, как $\frac{v(0)+v(60)}{2} = 100$, а затем умножить его на длину отрезка: $N \approx 100 \cdot 60 = 6000$ запросов.
2. Вычислить определённый интеграл $N = \int_0^{60}\left(100 + 10\sin\frac{\pi t}{30}\right)dt$. Результат $N = 6000$ запросов даст точное значение общего количества запросов как площади под кривой скорости.
3. Найти первообразную $V(t)$ функции $v(t)$ и вычислить её значение $V(60)$.
4. Проанализировать максимальное и минимальное значение скорости: $v_{max} = 110$, $v_{min} = 90$. Оценить количество запросов, как $N \approx \frac{110+90}{2} \cdot 60 = 6000$ запросов.

Ответ: 2.

Задание 4

Инженер – программист разрабатывает алгоритм для сравнения элементов на числовой прямой. В одной из подзадач требуется корректно определить условие, при котором два числа x и y находятся на одинаковом расстоянии от числа a, но по разные стороны от него (то есть симметричны относительно точки a). В процессе рассуждения инженер записал следующее утверждение: «Числа x и y симметричны относительно точки a на числовой прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство $|x-a|=|y-a|$. Оцените это утверждение с точки зрения его математической корректности и полноты, как основы для алгоритмической проверки. Данное утверждение является верным и достаточным математическим условием для проверки симметрии двух чисел относительно заданной точки.

Варианты ответа:

1. Верно.
2. Неверно.

Ответ: 1.

Задание 5

Разработчик создаёт программу для визуализации 3D-рельефа местности на основе данных геолокации. В математической модели высота точки поверхности H задаётся как значение функции двух переменных – широты x и долготы y. При отладке алгоритма вычисления средней высоты на участке возник спор о корректности терминологии. Коллега разработчика сделал следующее утверждение: «Если мы вычисляем среднюю высоту на заданном прямоугольном участке карты, то это операция, которая в своей математической сути является вычислением среднего значения функции $H(x;y)$ по её области определения – множеству географических координат $(x;y)$ этого участка. Следовательно, для точного математического расчёта среднего значения необходимо использовать двойной интеграл от функции $H(x;y)$ по этой области и разделить результат на площадь участка.» Оцените это утверждение с точки зрения его математической корректности и применимости, как основы для алгоритмического решения задачи. Данное утверждение верно отражает математическую суть задачи нахождения среднего значения функции двух переменных по заданной области и указывает корректный метод её точного решения.

Варианты ответа:

1. Верно.
2. Неверно.

Ответ: 1.

Задание 6

Аналитик в компании, занимающейся обработкой потоковых данных, исследует алгоритм, который в процессе работы суммирует последовательность числовых значений a_n, генерируемых внутренним датчиком системы. Для гарантии корректности и устойчивости работы алгоритма необходимо убедиться, что итоговая сумма всех возможных поступающих значений является конечным числом, даже если их количество неограниченно велико. Математически это означает необходимость исследования сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Какие три из перечисленных ниже математических действия являются обязательными, теоретически обоснованными и наиболее эффективными шагами для анализа сходимости такого ряда в рамках профессиональной задачи обеспечения устойчивости алгоритма?

Варианты ответов (выберите три верных):

1. Проверить выполнение необходимого условия сходимости числового ряда, то есть вычислить предел $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Если он не равен нулю или не существует, можно сразу сделать вывод о расходимости ряда.

2. Попытаться найти явную формулу для частичной суммы $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ и исследовать её предел при $n \to +\infty$.
3. Сравнить данный ряд с заведомо сходящимся или расходящимся эталонным рядом (например, геометрическим $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$ или обобщённым гармоническим $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$), используя признаки сравнения.
4. Применить признаки Даламбера или Коши (радикальный), вычислив соответствующие пределы $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ или $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, если элементы ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ имеют подходящую структуру (например, содержат факториалы, степенные выражения).
5. Произвести сложение нескольких первых десятков или сотен членов ряда на компьютере. Если последовательность частичных сумм демонстрирует явную тенденцию к стабилизации, можно сделать вывод о сходимости.

6. По общему члену ряда a_n составить функцию $f(x)$ и исследовать её на экстремум.
Ответ: 134.

Задание 7

Программист-аналитик работает над алгоритмом оптимизации, который настраивает параметры *x* и *y* (например, коэффициенты фильтра или скорости обучения) для минимизации функции ошибки $E(x;y)$. Алгоритм использует информацию о локальном поведении функции *E* в окрестности текущей точки $(x_0;y_0)$. Какие три из следующих утверждений, основанных на понятии частных производных, являются верными и имеют принципиальное значение для понимания и реализации подобных градиентных методов оптимизации?
Варианты ответов (выберите три верных):

1. Частная производная $\frac{\partial E}{\partial x}(x_0;y_0)$ показывает скорость изменения функции $E(x;y)$ при малом изменении только аргумента *x*, когда значение переменной *y* зафиксировано равным y_0.

2. Если обе частные производные $\frac{\partial E}{\partial x}$ и $\frac{\partial E}{\partial y}$ в точке $(x_0;y_0)$ равны нулю, то эта точка обязательно является точкой локального минимума функции $E(x;y)$.

3. Вектор, составленный из частных производных $\left(\frac{\partial E}{\partial x}(x_0;y_0); \frac{\partial E}{\partial y}(x_0;y_0)\right)$, называется градиентом функции $E(x;y)$ и обозначается $\overrightarrow{\mathrm{grad}} E(x_0;y_0)$. Этот вектор указывает направление наискорейшего роста функции в данной точке.

4. Для быстрого спуска к минимуму алгоритм должен сдвигать точку $(x;y)$ в направлении, противоположном градиенту, так как это направление наискорейшего убывания функции $E(x;y)$.

5. Смешанные частные производные $\frac{\partial^2 E}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 E}{\partial y \partial x}$ не имеют практического значения для градиентных методов и никогда не используются при оптимизации.
6. Если функция $E(x; y)$ линейна относительно x и y (например, $E(x; y) = ax + by + c$), то её градиент постоянен, и метод наискорейшего спуска найдёт минимум за одну итерацию.
Ответ: 134.

Задание 8

Инженер-разработчик в команде, создающей систему анализа данных, работает над модулем валидации пользовательского ввода. Модуль должен проверять, принадлежит ли введённое пользователем значение x области определения встроенных математических функций, используемых для расчётов. Несоответствие приводит к ошибке выполнения. Установите соответствие между математической функцией $f(x)$, используемой в расчётном ядре системы, и условием, которое необходимо проверить для переменной x, чтобы гарантировать корректность вычисления $f(x)$.
Математические функции:

1	2	3	4
$f(x) = \sqrt{4 - x}$	$g(x) = \ln(x+1)$	$s(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$	$r(x) = \arcsin \frac{x}{2}$

Условия, наложенные на независимую переменную:

А	Б	В	Г
$x \neq -3$, $x \neq 3$	$-2 \leq x \leq 2$	$x \leq 4$	$x > -1$

Ответ:

1	2	3	4
В	Г	А	Б

Задание 9

Установите соответствие между профессиональной задачей (1 – 4) и необходимым для её решения математическим понятием или методом (А – Д). К каждому заданию подберите один наиболее подходящий для её решения математический инструмент. Один из элементов в правом столбике – лишний.

Профессиональная задача	Математическое понятие или метод
1. При моделировании игрового мира нужно быстро определить, в каком направлении персонаж будет набирать высоту (по карте местности) наиболее быстро.	А. Вычисление частных производных функции двух переменных.
2. Требуется найти точку на поверхности интерфейса (заданной уравнением), где отображаемый параметр (например, нагрузка системы) достигает максимума.	Б. Нахождение градиента функции и определение направления его вектора.
3. При настройке нейросети нужно оценить, как небольшие изменения двух коэффициентов усиления повлияют на общую ошибку работы алгоритма.	В. Поиск наибольшего и наименьшего значения функции на замкнутой ограниченной области.

4. Необходимо аппроксимировать поведение сложной функции от двух параметров настройки сервера вблизи рабочей точки для быстрого прогноза при малых изменениях.	Г. Использование геометрического смысла полного дифференциала функции двух переменных для приближённого вычисления значения функции в точки.

Ответ:

1	2	3	4
Б	В	А	Г

Задание 10

Перед вами профессиональная задача: «Программист – системотехник работает над модулем симуляции физического движения объекта. Для расчёта координаты объекта $s(t)$ в момент времени *t*. Программисту известна функция мгновенной скорости движения объекта $v(t)=3t^2+\cos t-2e^{-t}$, полученная из данных датчиков. Начальное положение объекта задаётся условием $s(0)=5$. Необходимо получить аналитическую формулу для $s(t)$, описывающую координату объекта во времени.» В правом столбце перечислены этапы решения этой задачи с применением понятий и методов темы «Неопределённый интеграл». Расположите эти этапы в правильной логической последовательности (от 1 до 5). Заметим, что один этап является лишним и не должен входить в итоговую последовательность.

Этапы решения (перемешаны):

А. Записать ответ в виде семейства функций $s(t)=t^3+\sin t+2e^{-t}+C$, где *C* – произвольная постоянная (константа интегрирования).

Б. Применить метод замены переменной (подстановки) для вычисления интеграла от сложной функции.

В. Сформулировать математическую задачу: нахождение функции $s(t)$ по её производной $v(t)$. Это означает найти неопределённого интеграла: $s(t)=\int v(t)dt=\int\left(3t^2+\cos t-2e^{-t}\right)dt$.

Г. Использовать свойство линейности интеграла и таблицу интегралов основных функций для нахождения интеграла:
$\int\left(3t^2+\cos t-2e^{-t}\right)dt=\int 3t^2dt+\int\cos t dt-\int 2e^{-t}dt=t^3+\sin t+2e^{-t}+C$, $C\in\mathbf{R}$.

Д. Найти значение произвольной постоянной *C*, используя начальное условие $s(0)=5$. Для этого подставить $t=0$ в найденное выражение и решить полученное уравнение относительно *C*, затем записать окончательный частный ответ: $s(t)=t^3+\sin t+2e^{-t}+2$.

Е. Проверить результат дифференцированием, убедившись, что производная полученной функции $s(t)$ совпадает с исходной функцией $v(t)$.

Ответ: ВГАДЕ.

Задание 11

Вам необходимо проанализировать задачу, связанную с оптимизацией потребления ресурсов в вычислительной системе. В правом столбце перечислены этапы её решения с применением методов дифференциального исчисления. Восстановите логическую последовательность этих этапов, записав их буквенные обозначения в нужном порядке. Один этап является лишним и не должен входить в итоговую цепочку рассуждений.

Задача: «Инженер – системотехник анализирует работу распределённого вычислительного узла. Эмпирически установлено, что среднее время обработки запроса *T* (в мс) зависит от

частоты процессора x (в Гц) по закону: $T(x)=0{,}1x^2-\frac{50}{x}+300$, $x>0$. Требуется найти оптимальную частоту процессора x_{opt}, при которой время обработки $T(x)$ будет минимальным, чтобы сбалансировать производительность и энергопотребление.
Перечень этапов (представлены в случайном порядке):
А. Найти производную: $T'(x)=0{,}2x+\frac{50}{x^2}$.
Б. Построить график функции $T(x)$ на миллиметровой бумаге и визуально определить точку минимума.
В. Проанализировать поведение функции на границах области определения (границы области определения соответствуют условиям: $x\to 0+$ и $x\to+\infty$), чтобы убедиться, что найденный экстремум является глобальным минимумом.
Г. Решить уравнение $0{,}2x+\frac{50}{x^2}=0$ при условии $x>0$. Для этого преобразовать его к виду $2x^3+500=0$ и сделать вывод об отсутствии положительных корней.
Д. Записать необходимое условие экстремума $T'(x)=0$: $0{,}2x+\frac{50}{x^2}=0$.
Е. Сделать вывод: функция $T(x)$ строго возрастает на всей области определения $x>0$, так как её производная $T'(x)>0$ при всех $x>0$. Следовательно, минимум достигается на левой границе области, что указывает на необходимость пересмотра математической модели или физических ограничений задачи (например, задать нижнюю границу для x из технических условий).
Ответ: АДГЕВ.

Задание 12

Вам необходимо реализовать вычисление функции $y=e^{-x}$ на микроконтроллере с ограниченными ресурсами для $x\in[0;\,2]$ с относительной погрешностью менее $0{,}1\%$. Используя разложение в ряд Тейлора $e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^n}{n!}$ и учитывая, что погрешность усечённого ряда не превосходит модуля первого отброшенного члена, определите минимальное количество членов ряда (N), которое гарантирует требуемую точность на всём промежутке $[0;\,2]$. В расчёте используйте наихудший случай ($x=2$). В ответе укажите целое число N.
Ответ: 9.

Задание 13

Вы разрабатываете функцию для "умного" масштабирования графического элемента (виджета) на экране. Размер виджета должен плавно увеличиваться при наведении курсора, но его рост должен замедляться по мере приближения к максимальному допустимому размеру, чтобы анимация выглядела естественно. Зависимость коэффициента масштаба S (относительный размер, где 1.0 — исходный размер) от времени наведения t (в секундах) задаётся функцией: $3-\frac{4}{t+1}$, где $t\geq 0$. Определите, в какой момент времени t скорость увеличения размера виджета (то есть $S'(t)$) станет меньше 0.01 условных единиц масштаба в секунду. Ваш ответ (значение t) будет использован в коде для оптимизации анимации (например, для перехода к следующему этапу).
Ответ: 19.

Задание 14

Вы анализируете эффективность нового алгоритма сглаживания данных. Время его работы $T(n)$ в зависимости от количества входных данных n описывается формулой: $S(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$. Программист-коллега утверждает, что для очень больших n значение $S(n)$ можно заменить константой $C\approx 2$ при оценке общего времени работы $T(n)$. На каком математическом свойстве объекта основана эта правомерная замена? Ответ сформулируйте одним словом.
Ответ: сходимость.

Задание 15

Вы оптимизируете функцию, которая вычисляет общую стоимость C обслуживания серверов. Стоимость непрерывно накапливается с переменной интенсивностью $r(t)$ (рублей в час) в течение временного интервала $[a;b]$. Для точной оценки вы заменяете непрерывный процесс на его дискретную аппроксимацию: разбиваете интервал на n малых отрезков длиной Δt, на каждом из которых интенсивность считаете постоянной $r(t_k)$, и суммируете вклады: $C\approx\sum_{k=1}^{n} r(t_k)\cdot\Delta t$. В практике профилирования кода общее время выполнения алгоритма оценивается, как площадь под графиком функции $r(t)$, показывающей загрузку процессора в зависимости от времени. Какой математический аппарат вы применяете для точного вычисления этой площади?
Ответ: определённый интеграл.

6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

1 семестр
ВОПРОСЫ К СОБЕСЕДОВАНИЮ № 1
«ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ»

1. Предел функции в точке и на бесконечности, геометрический смысл.
2. Определения непрерывности функции в точке на разных языках.
2. Точки разрыва и их классификация.
3. Теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями.

2 семестр
ВОПРОСЫ К СОБЕСЕДОВАНИЮ № 2
«ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ»

1. Вычисление площадей плоских фигур.
2. Вычисление объемов тел вращений.
3. Нахождение длин дуг.
4. Вычисление площадей поверхностей.

1 семестр
Самостоятельная работа № 1

1. Дать определение на языке $"\varepsilon-\delta"$ и на языке окрестностей.

$$\lim_{x\to 7} f(x)=2$$

2. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел в точке.

Вычислить: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x+\pi}$.

Самостоятельная работа № 2

Записать определение на языке "$\varepsilon-\delta$" и дать геометрическую иллюстрацию: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=4$.

Восстановить запись:

$$***=\lim_{x\to-3} f(x)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \left|\forall x\in D(f)\ из\ ***\Rightarrow\right|f(x)+7\Big|<\varepsilon$$

Вычислить: $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-49}$.

Самостоятельная работа № 3

1. Дайте определение функции, дифференцируемой в точке.

2. Составьте приращение Δf для функции $f(x)=2\cos x-x^2$.

3. Найдите по определению производную функции $y=x^2+1$.

Самостоятельная работа № 4

1. Составьте уравнение касательной к кривой $y=\ln(x^2)$, которая параллельна прямой $y=-x$.

2. В каких точках касательная к графику функции $y=\dfrac{x-8}{x+8}$ образует с осью*Ox* угол 45^0?

Самостоятельная работа № 5

1. По графику функции схематически построить график производной

2. Найти промежутки монотонности, точки экстремума, промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба: $y=\dfrac{12x}{9+x^2}$.

2 семестр

Самостоятельная работа № 1

Найти интегралы:

$$\int\frac{dx}{x^2+9};\quad \int\frac{3dx}{\sqrt{3-x^2}};\quad \int\frac{xdx}{2+x^2};\quad \int\frac{dx}{\sqrt{5+x^2}};\quad \int\frac{7dx}{x^2-4};\quad \int 7^{2x+1}dx$$

ТЕСТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Инструкция для студента

Тест содержит 25 заданий, из них 15 заданий – часть А, 5 заданий – часть В, 5 заданий – часть С. На его выполнение отводится 90 минут. Если задание не удается выполнить *сразу, перейдите к следующему. Если останется время вернитесь к пропущенным заданиям. Верно выполненные задания части А оцениваются в 1 балл, части В – 2 балла, части С – 5 баллов.*

Часть А

К каждому заданию части А даны несколько ответов, из которых только один верный. Выполнив задание, выберите верный ответ и укажите в бланке ответов.

А1. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 + 2x - 35}{x - 5}$

1) 0	2) 12	3) $+\infty$	4) 1

А2. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to -a} \dfrac{6\sin 2(a + x)}{(x + a)}$

1) 0	2) 6	3) 1	4) 12

А3. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 5x + 6}{(\sqrt{x} + 5)\cdot(\sqrt{x} - 5)\cdot(1 - x)\cdot(7x^2 + 3)}$

1) ∞	2) $-\dfrac{1}{7}$	3) 0	4) 1

А4. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 3}{x + 1}\right)^{x+1}$

1) e^2	2) e^{-1}	3) e^3	4) e

А5. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{2x^2 - 5x + 4} - \sqrt{x^2 - 3x}\right)$

1) ∞	2) $\dfrac{1}{3}$	3) 1	4) 0

А6. Найти предел функции $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x - 1)}{x}$

1) $+\infty$	2) $-\infty$	3) 1	4) 0

А7. Для функции $y = x \cdot e^{-3x}$ найти dy

1) $\left(e^{-3x} + x \cdot e^{-3x}\right)dx$	3) $\left(\dfrac{x^2}{2} \cdot e^{-3x} - \dfrac{x}{3} \cdot e^{3x}\right)dx$
2) $\left(e^{-3x} - 3x \cdot e^{-3x}\right)dx$	4) $\left(-e^{-3x} + x \cdot e^{-3x}\right)dx$

А8. Найти интеграл $\int xe^{3x}dx$

1) $3xe^{3x} - 9e^{3x} + C$	2) $\dfrac{x}{3}e^{3x} + \dfrac{1}{3}e^{3x} + C$
3) $\dfrac{x}{3}e^{3x} - \dfrac{1}{9}e^{3x} + C$	4) $x^2e^{3x} - \dfrac{x}{3}e^{3x} + C$

A9. Вычислить интеграл $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$

1) $3\ln^2 x + C$	2) $\frac{\ln^4 x}{4x} + C$	3) $\ln^3 x \cdot \ln\lvert x \rvert + C$	4) $\frac{\ln^4 x}{4} + C$

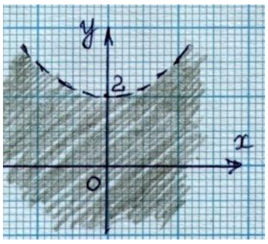
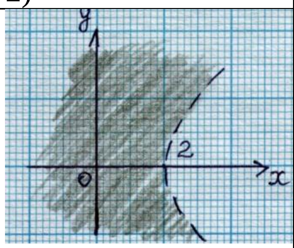
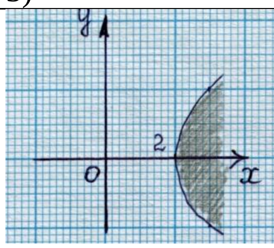
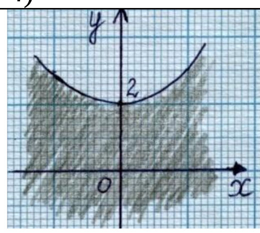
A10. Рациональную дробь $\frac{2x^2+5}{(x^2+x+1)(x+1)^2(x-3)}$ можно разложить в сумму простейших дробей:

1) $\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x-3}$	2) $\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{x-3}$
3) $\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} + \frac{F}{x-3}$	4) $\frac{A}{x^2+Bx+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{F}{x-3}$

A11. Выбрать на чертеже фигуру, ограниченную линией $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.

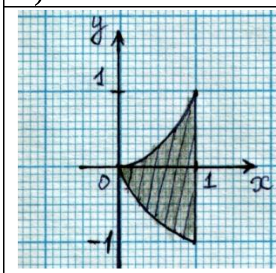
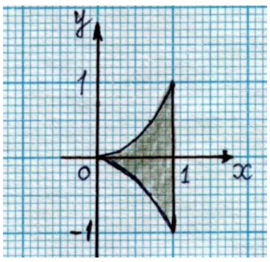
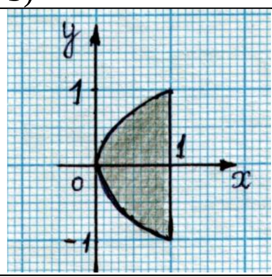
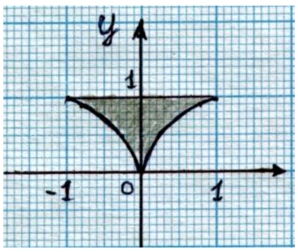
1) 0 42	2) -4 0	3) 0 4	4) -4 0

A12. Область определения функции $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$ изображена на рисунке

1)	2)	3)	4)
			

A13. Указать область интегрирования для суммы повторных интегралов

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{y^2}^{1} f dx + \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{1} f dx$$

1)	2)	3)	4)
			

A14. Изменить порядок интегрирования в сумме повторных интегралов

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{y^2}^{1} f dx + \int_{0}^{1} dy \int_{\sqrt{y}}^{1} f dx$$

1) $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f dy$	2) $\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} f dy$	3) $\int_{-1}^{1} dx \int_{-x^2}^{x^2} f dy$	4) $\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f dy$

A15. Найти частную производную $\frac{\partial u}{\partial y}$ для функции $u = y + \sin(x \cdot y)$

1) $1 + \cos(x \cdot y)$	2) $1 + x\cos(x \cdot y)$	3) $1 - \cos(x \cdot y)$	4) $1 - x\cos(x \cdot y)$

ЧАСТЬ В

Будьте внимательны! Задания части В могут быть 3-х типов:

1) задания, содержащие несколько верных ответов;

2) задания на установление соответствия;

3) задания, в которых ответ должен быть дан в виде числа, слова, символа.

В1. x_0 – точка устранимого разрыва, если:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \overline{\exists}$ б) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ в) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ A \neq f(x)$

г) $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$

1) а	2) б	3) в	4) г

В2. Составить уравнение касательной к графику функции $y = -3x^3 - 5x^2 - 6x + 24$ в точке с абсциссой $x = -2$.

1) $y = 22x - 4$	2) $y = -2(11x + 2)$	3) $y = -22x - 4$	4) $y = 2(11x + 2)$

В3. Множество $(1;3)$ является интервалом сходимости ряда.

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$	2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$	3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$	4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

В4. Из рядов а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{9n}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ сходятся

1) a	2) b	3) c	4) все расходятся

В5. Дана функция $y = x \cdot e^{-3x}$. Найти y''

1) $-3e^{-3x}(2 - 3x)$	2) $-6e^{-3x} + 9x \cdot e^{-3x}$	3) $-3e^{-3x}(2 + 3x)$	4) $6e^{-3x} + 9xe^{3x}$

ЧАСТЬ С

Ответы к заданиям части С формулируются в свободной краткой форме и записываются в бланк ответов.

С1. Найти точку локального минимума функции $y = x^2 + \frac{1}{x}$.

C2. Найти область сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-10)^n}{n}$.

C3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt{9{,}02}$.

C4. Вычислить с точностью до 0,0001 значение выражения $\sin 1^0$ (при помощи рядов).

C5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = 4x - x^2$ и осью абсцисс.

Ответы

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
2	4	2	1	1	4	2	3
A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	
4	2	3	2	1	2	2	

B1	B2	B3	B4	B5
3, 4	2, 3	1, 3	2, 3	1, 2

C1	$x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ - точка минимума. $y = x^2+\frac{1}{x}$, $y' = 2x-\frac{1}{x^2}$, $2x-\frac{1}{x^2}=0$, $x\neq 0$, $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, — + — 0 $x=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
C2	$x_0 = 10$, $R=1$, $(9,11)$, $x=9 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - условно сходится, $x=11 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ - расходится. Ответ: $[9,11)$
C3	$\sqrt{9{,}02}\approx\sqrt{9}+\frac{1}{2\sqrt{9}}\cdot 0{,}2 = 3+\frac{0{,}1}{3}\approx 3{,}033$
C4	$\sin 1^0 = \sin\frac{\pi}{180}\approx\frac{\pi}{180}-\frac{\pi^3}{180^3\cdot 3!}\approx 0.0174$
C5	$\int_0^4 (4x-x^2)dx = \left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^4 = 32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}$

Критерии оценки тестовых заданий

За правильный ответ на вопросы заданий части А испытуемый получает 1 балл, заданий части В - 2 балла, заданий части С – 5 баллов.

Перевод тестовых баллов в четырех балльную шкалу оценок осуществляется по следующей шкале.

Неудовлетворительно до 60% баллов за тест

Удовлетворительно	от 61% до 74% баллов за тест
Хорошо	от 75% до 84% баллов за тест
Отлично	более 85% баллов за тест

Индивидуальное задание 1

Дифференциальное исчисление функции одного переменного

1. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0+}(ctg3x)^{\frac{4}{\ln x}}$; б) $\lim\limits_{y\to 1}\frac{\sqrt{2y-y^4}-\sqrt[3]{y}}{1-\sqrt[4]{y}}$; в) $\lim\limits_{t\to\infty}3t^2(e^{\frac{4}{t^2}}-1)$.

1. Касательная к кривой $y=15x^2-5$ образует с осью абсцисс угол 60^0. Составить уравнение касательной.

2. Найти dU, если $U=\left(arcctg\sqrt{ln\frac{5}{y}}\right)^8$.

3. Тело движется прямолинейно по закону $S=t^3-3t+4$,(t - время в сек., S - путь в м). Через какое время после начала движения скорость тела окажется равной 9м/с?

4. Найти промежутки монотонности, точки экстремума: $y=16x^3-36x^2+24x-9$.

Индивидуальное задание 2

Ряды

1. Множество $(1,3)$ является интервалом сходимости ряда:

   а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$ $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n}$ $c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2}$ $d)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$

2. Определить сходимость рядов:

   $a)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{4n+1}}{9n}$ $b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ $c)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

3. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-10)^n}{n}$.

4. Вычислить с точностью до 0,0001 значение выражения $\sin 1^\circ$ (при помощи рядов).

Индивидуальное задание 3

Интегральное исчисление функции одного переменного

1. Найти площадь эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. Вычислить интеграл $\int\limits_{-1}^{1}x\ arctg\ x\ dx$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=2(1-\sin\varphi)$.

4. Определить площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями: $y=2\sqrt{x}$, $y=0$, $x=2$.

5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $I=\int\limits_{0}^{\infty}\frac{x}{x^3+1}dx$.

Индивидуальное задание 4

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:
$$z = \arcsin(2y(1+x^2)-1).$$
2. Найти и изобразить на плоскости линии уровня функции двух переменных:
$$z + x\ln z + y = 0,\ z = 0.$$
3. Найти все частные производные первого порядка функции:
$$z = \frac{1}{arctg\frac{y}{x}}.$$
4. Найти все частные производные второго порядка:
$$z = y^{\ln x}.$$
5. Найти полный дифференциал dz данной функции:
$$z = y \cdot x^y.$$
6. Вычислить приближенно:
$$\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1).$$
7. Исследовать функцию на экстремум:
$$z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8.$$

Индивидуальное задание 5

Интегральное исчисление функции нескольких переменных

1. Построить область интегрирования $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} f(x,y)dy$.
2. Вычислить $\int\limits_3^4 dx \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$.
3. Изменить порядок интегрирования $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.
4. Переходя к полярным координатам, вычислить $\int\limits_0^R \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dxdy$.
5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $y = x-1$, $y = -1$.
6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $2y^2 = x$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$, $z = 0$.
7. Найти момент инерции фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ относительно его большой оси.
8. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $2y = x^2$, $y = x^2$, $x=1$, $x = 2$.
9. Вычислить $\iiint\limits_V xydxdydz$; $V:\ z = xy,\ x+y \le 1,\ y \ge 0,\ z \ge 0$.

Индивидуальное задание 6
Дифференциальные уравнения

1. Методом изоклин построить поле интегральных кривых уравнения $y' = x$.
2. Найти общие решения дифференциальных уравнений:
   $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$;
   $y'tgx = y$;
   $\dfrac{xdy}{\sqrt{1-y^2}} + \dfrac{ydx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$.
3. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 2y = x^2$.
4. Найти частное решение уравнения, $y^{(4)} = \cos^2 x$ при3
   $y(0) = \dfrac{1}{32},\ y'(0) = 0,\ y''(0) = \dfrac{1}{8},\ y'''(0) = 0$.

3 семестр ОЗО
Контрольная работа

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:
$$z = \arcsin(2y(1+x^2)-1).$$
2. Найти и изобразить на плоскости линии уровня функции двух переменных:
$$z + x\ln z + y = 0,\ z = 0.$$
3. Найти все частные производные первого порядка функции:
$$z = \frac{1}{arctg\dfrac{y}{x}}.$$
4. Найти полный дифференциал dz данной функции:
$$z = y \cdot x^y.$$
5. Вычислить приближенно: $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

Интегральное исчисление функции нескольких переменных

6. Построить область интегрирования $\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x,y)dy$.
7. Вычислить $\int_3^4 dx \int_0^{\ln y} e^x dx$.
8. Изменить порядок интегрирования $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.
9. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $y = x - 1$, $y = -1$.

10. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $2y = x^2$, $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$.
11. Вычислить $\iiint\limits_V xydxdydz$; $V:\ z = xy$, $x + y \le 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

Вопросы к зачету и экзамену

Вопросы зачета

I семестр

1. Действительные числа, их геометрическое изображение.
2. Модуль числа и его свойства.
3. Sup X и inf X. Теорема о существовании супремума.
4. Числовые функции, основные понятия.
5. Монотонные и ограниченные функции.
6. Четность и периодичность функций.
7. Предел функции в точке.
8. Теорема о единственности предела.
9. Предельный переход в неравенствах.
10. Бесконечно малые функции и их свойства.
11. Предел суммы и произведения функций.
12. Предел частного двух функций.
13. Первый замечательный предел.
14. Односторонние пределы.
15. Предел сложной функции.
16. Бесконечно большие функции.
17. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими.
18. Сравнение бесконечно малых.
19. Предел функции на бесконечности.
20. Числовая последовательность, ее предел.
21. Второй замечательный предел.
22. Непрерывность функции в точке.
23. Точки разрыва и их классификация.
24. Арифметические операции над непрерывными функциями.
25. Непрерывность сложной функции.
26. Пределы и точки разрыва монотонной функции.
27. Непрерывность обратной функции.
28. Дифференцируемость функции. Непрерывность и дифференцируемость.
29. Производная, ее геометрический и механический смысл.
30. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости.
31. Дифференциал, его геометрический и механический смысл.
32. Дифференцирование суммы, произведения, частного.
33. Производная сложной функции.
34. Производная обратной функции.
35. Производная степенной, показательной, логарифмической функций.
36. Производные тригонометрических функций.
37. Производные обратных тригонометрических функций.
38. Правила Лопиталя.
39. Экстремумы, необходимое условие. Достаточные условия.

40. Понятие выпуклости и вогнутости, их достаточные условия.
41. Точки перегиба, достаточные условия.

Вопросы экзамена

II семестр

1. Числовые сходящиеся ряды, остаток сходящегося ряда.
2. Признаки сравнения рядов.
3. Признак Даламбера. Признак Коши.
4. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость рядов.
5. Функциональные ряды.
6. Степенные ряды. Теорема Абеля.
7. Ряд Тейлора.
8. Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.
9. Метод интегрирования по частям.Метод замены переменной.
10. Интегрирование рациональных функций.
11. Интегрирование рациональных функций.
12. Интегрирование тригонометрических функций.
13. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл.
14. Свойства определенного интеграла.
15. Приложения определенного интеграла
16. Понятие функции нескольких переменных, ее область определения. График функции двух переменных.
17. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
18. Дифференцируемость функций, определение частных производных, их геометрический смысл.
19. Полный дифференциал.
20. Понятие максимума и минимума. Необходимое и достаточное условия экстремума для функции двух переменных.
21. Понятие двойного интеграла и его вычисления.
22. Двойной интеграл в полярных координатах.
23. Понятие тройного интеграла и его вычисления.
24. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
25. Тройной интеграл в сферических координатах.
26. Вычисление площадей плоских фигур, объемов тел и площадей гладких поверхностей.
27. Криволинейный интеграл первого рода и его вычисления. Свойства криволинейного интеграла первого рода.
28. Криволинейный интеграл второго рода и его вычисления. Свойства криволинейного интеграла второго рода.

7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Информационные технологии – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- Официальный сайт БГПУ;
- Корпоративная сеть и корпоративная электронная почта БГПУ;
- Система интерактивного электронного обучения системы Iskanderus eLearning
- Система тестирования на основе единого портала «Интернет-тестирования в сфере образования www.i-exam.ru»;
- Электронные библиотечные системы;

8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

9.1 Литература

1. Муратова, Т. В. Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для вузов / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 435 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01456-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/489021 (дата обращения: 13.10.2022).
2. Косников, С. Н. Математические методы в экономике : учебное пособие для вузов / С. Н. Косников. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 170 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04098-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/492109 (дата обращения: 13.10.2022).
3. армаш, А. Н. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев ; под редакцией В. В. Федосеева. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 328 с. — (Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3698-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/507819 (дата обращения: 13.10.2022).

9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Всероссийский образовательный портал «Информационно-коммуникационные технологии педагогам» - https://edu-ikt.ru/
2. Федеральный портал «Российское образование» - http://www.edu.ru.
3. Федеральная университетская компьютерная сеть России - http://www.runnet .ru/res.
4. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу/ Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М: Высшая школа, 2000. – 695с.
5. Баврин, И.И.Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
6. Берман, Г.Н.Сборник задач по курсу математического анализа. Решение типичных и трудных задач: учеб.пособие / Г. Н. Берман. - 3-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2007. - 604 с.
7. Бохан, К.А. Курс математического анализа / К.А.Бохан, И.А.Егорова, К.В.Лащенов. – М.: Просвещение, 1972, т. 1, 436 с.
8. Бохан, К.А. Курс математического анализа / К.А.Бохан, И.А.Егорова, К.В.Лащенов. – М.: Просвещение, 1972, т. 2, 380 с.
9. Бугров, Я.С. Дифференциальное и инте¬гральное исчисление / Я.С.Бугров, С.М.Никольский. – М.: Наука, 1988. - 432 с.
10. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: В 2 кн. : учеб. пособие для студ.ун-тов и пед. вузов / И. А. Виноградова; соавт. С. Н. Олехник, соавт. В. А. Садовничий. - 2-е изд., перераб. - М.: Высшая школа, 2002. - Кн.1 : Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. - 2-е изд., перераб. - 724 с.
11.

9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». - Режим доступа: https://urait.ru
2. Полпред (обзор СМИ). - Режим доступа: https://polpred.com/news.
3. Справочно-информационный портал http:// www.gramota.ru
4. Информационно-образовательный портал http:// www.auditorium.ru
5. Электронная библиотека образовательных и научных изданий http://www.iqlib.ru
6. Университетская информационная система Россия. УИС РОССИЯ http://www.cir.ru
7. Интернет-библиотека СМИ Public.ru http:// www.public.ru
8. Электронная библиотека http:// www.book.ru
9. Электронная библиотека http:// www.KNIGAFUND.ru
10. Система электронного обучения «IskanderuseLearning» http:// www.iskanderus.ru
11. Львовский, С.М. Лекции по математическому анализу [Электронный ресурс] : . — Электрон. дан. — М. : МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2008. – 296 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9366 — Загл. с экрана.
12. Натанзон, С.М. Краткий курс математического анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — М. : МЦНМО (Московский центр непрерывного математического образования), 2008. — 95 с. — Режим доступа: http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=9375— Загл. с экрана.

10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, с выходом в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами.

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Windows, Linux; офисные программы Microsoft office, Libreoffice, OpenOffice; Adobe Photoshop, Matlab, DrWeb antivirus.

Разработчик: Сёмочкина О.А., кандидат педагогических наук, доцент

11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 20__/20__ уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 20__/20__ уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол №__ от «__» ________ 20__ г.). В РПД внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 1 № страницы с изменением:	
Исключить:	Включить:
№ изменения: 2 № страницы с изменением:	
Исключить:	Включить: