	МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»
	ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА Рабочая программа дисциплины

УТВЕРЖДАЮ
Декан
физико-математического факультета
ФГБОУ ВО «БГПУ»
______________Т.А. Меределина
«24» мая 2023 г.

Рабочая программа дисциплины
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки
44.03.05 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
(с двумя профилями подготовки)

Профиль
«ИНФОРМАТИКА»

Профиль
«МАТЕМАТИКА»

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Принята
на заседании кафедры физического и
математического образования
(протокол № 9 от «24» июня 2023 г.)

Благовещенск 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель дисциплины: сформировать представление у студентов об основных понятиях математического анализа, их свойствах и приложениях, формирование систематических знаний в области математического анализа, связанного со школьным курсом математики; воспитывать общую математическую культуру, необходимую будущему педагогу.

1.2 Место дисциплины в структуре ООП: Дисциплина «Математический анализ» относится к дисциплинам предметного модуля по Математике части, формируемой участниками образовательных отношений Б1 (Б1. В.01.02).

Для освоения дисциплины «Математический анализ» студенты используют знания, умения и навыки, сформированные в процессе изучения математики, алгебры и геометрии в общеобразовательной школе, формируемые в процессе изучения дисциплины знания будут использоваться для последующего изучения дисциплин профессионального цикла и курсов по выбору студентов.

1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: ПК-2.

- ПК-2. Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования; индикаторами достижения которой является:

- ПК-2.2 Владеет основными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов.
- ПК-2.5 Применяет математический язык как универсальное средство построения модели явлений, процессов, для решения практических и экспериментальных задач, эмпирической проверки научных теорий.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения. В результате изучения дисциплины студент должен

знать:
- основные понятия математического анализа;
- основные свойства и теоремы математического анализа;
- основные методы математического анализа;

уметь:
- вычислять пределы, находить производные и вычислять интегралы;
- используя определения, проводить исследования, связанные с основными понятиями;
- применять методы математического анализа к доказательству теорем и решению задач;

владеть:
- современными знаниями о математическом анализе и его приложениях;
- основными понятиями школьного курса «Алгебра и начала анализа».

1.5 Общая трудоемкость дисциплины «Математический анализ» составляет 12 зачетных единиц (далее – ЗЕ) (432 часа):

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и практических занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Объем дисциплины и виды учебной деятельности (очная форма обучения)

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры			
		1	**2**	**3**	**4**
Общая трудоемкость	432	144	108	72	108
Аудиторные занятия	198	54	54	36	54
Лекции	80	22	22	14	22

Практические занятия	118	32	32	22	32
Лабораторные занятия					
Самостоятельная работа	198	54	54	36	54
Вид итогового контроля	36	**Экз (36)**	**Зачет**	**Зачет с оценкой**	**Зачет с оценкой**
Интерактив					

2. УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

2.1 Очная форма обучения

Учебно-тематический план (1 семестр)

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
	РАЗДЕЛ I. **Введение в анализ**	**108**	**22**	**32**	**54**
1.	Действительные числа	16	2	6	8
2.	Функции	24	4	8	12
3.	Предел функции	48	12	12	24
4.	Непрерывность функции	20	4	6	10
ИТОГО		**108+36**	**22**	**32**	**54**

Учебно-тематический план (2 семестр)

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
	Раздел II. **Дифференциальное исчисление функции одной переменной**	**64**	**12**	**20**	**32**
5.	Производная и дифференциал	36	6	12	18
6.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения	28	6	8	14
	Раздел III. **Интегральное исчисление функции одной переменной**	**44**	**10**	**12**	**22**
7.	Неопределенный интеграл	44	10	12	22
ИТОГО		**108**	**22**	**32**	**54**

Учебно-тематический план (3 семестр)

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
	Раздел III. **Интегральное исчисление функции одной переменной**	**34**	**7**	**10**	**17**
8.	Определенный интеграл	16	4	4	8
9.	Приложения определенного интеграла	17	2	6	9
10.	Несобственные интегралы	1	1	-	0

	Раздел IV. Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений	**38**	**7**	**12**	**19**
11.	Дифференциальные уравнения первого порядка	38	7	12	19
ИТОГО		**72**	**14**	**22**	**36**

Учебно-тематический план (4 семестр)

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
	Раздел IV. Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений	**28**	**6**	**8**	**14**
12.	Некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков	28	6	8	14
	Раздел V. Ряды	**80**	**16**	**24**	**40**
13.	Числовые ряды	36	8	10	18
14.	Функциональные ряды	8	2	2	4
15.	Степенные ряды	36	6	12	18
ИТОГО		**108**	**22**	**32**	**54**

Интерактивное обучение по дисциплине (1 семестр)

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Тема 1. Действительные числа	ПР	Работа в подгруппах: решение неравенств с модулем	2
2.	Тема 2. Функции	ПР	Работа в парах: работа со школьными учебниками 10 класса над задачами с применением свойств функций	2
3.	Тема 3. Предел	ПР	Работа в парах: вычисление пределов	4
4.	Тема 4. Непрерывность функций	ПР	Работа в подгруппах	2
ИТОГО				**10**

Интерактивное обучение по дисциплине (2 семестр)

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Тема 5. Производная и дифференциал	ПР	Работа в малых группах: выполнение заданий на геометрический и физический смысл производной	2
2.	Тема 5. Производная и дифференциал	ПР	Работа в парах: выполнение заданий на применение	2

			дифференциала в приближенных вычислениях	
3.	Тема 6. Основные теоремы дифференциального исчисления	ПР	Работа в парах: решение задач на оптимизацию	4
4.	Тема 6. Основные теоремы дифференциального исчисления	ПР	Работа в парах: построение графиков функций	2
5.	Тема 7. Неопределенный интеграл	ПР	Работа в парах: выполнение заданий с взаимопроверкой	2
ИТОГО				**12**

Интерактивное обучение по дисциплине (3 семестр)

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Тема 9. Приложения определенного интеграла	ПР	Работа в малых группах: решение задач с использованием определенного интеграла	6
2.	Тема 11. Дифференциальные уравнения первого порядка	ПР	Работа в малых группах: решение практикоориентированных задач	4
ИТОГО				10

Интерактивное обучение по дисциплине (4 семестр)

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
	Тема 12. Некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков	ПР	Работа в парах	2
2.	Тема 13. Числовые ряды	ЛК	Работа в парах по составлению карты основных понятий и теорем	5
3.	Тема 14. Функциональные ряды	ПР	Работа в парах: решение задач	1
4.	Тема 15. Степенные ряды	ПР	Работа в парах: приближенные вычисления	4
ИТОГО				**12**

3. СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

РАЗДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Тема 1. Действительные числа

Множество действительных чисел. Геометрическое изображение действительных чисел. Непрерывность множества действительных чисел. Ограниченные, неограниченные множества. Промежутки. Супремум и инфимум множества и их существование.

Тема 2. Функции

Отображения. Действительная функция действительной переменной. Некоторые типы поведения функции. Сложная функция. Обратная функция. Способы задания функций. Основные элементарные функции.

Тема 3. Предел

Предел функции в точке. Свойства функции, имеющей предел в точке. Предел функции по множеству. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности и бесконечный предел. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Теорема о пределе монотонной последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства. Предел суммы, произведения, частного. Предельный переход в неравенствах. Предел сложной функции. Первый замечательный предел. Сравнение бесконечно малых функций. Число e.

Тема 4. Непрерывность функции

Непрерывность функции в точке и на множестве. Арифметические операции над непрерывными функциями. Предельный переход под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва. Пределы и точки разрыва монотонной функции. Теоремы о промежуточном значении непрерывной функции. Существование и непрерывность обратной функции. Ограниченность, достижение функцией наибольшего и наименьшего значений, непрерывность на отрезке.

РАЗДЕЛ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 5. Производная и дифференциал

Дифференцируемость функции. Производная и дифференциал, их геометрический и механический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференцирование суммы, произведения, частного. Дифференцирование сложной функции. Производная обратной функции. Таблица производных. Дифференцирование параметрически и неявно заданных функций. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциалы высших порядков.

Тема 6. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения

Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Признаки постоянства, возрастания и убывания функции на промежутке. Максимум и минимум. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Выпуклые функции. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций.

РАЗДЕЛ III. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Тема 7. Неопределенный интеграл

Задача восстановления функции по ее производной. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших иррациональных функций. Интегрирование простейших трансцендентных функций.

Тема 8. Определенный интеграл

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Интегрируемость функции и определенный интеграл. Нижние и верхние суммы ограниченной функции. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функций. Некоторые классы интегрируемых функций. Основные свойства определенного интеграла. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной.

Тема 9. Приложения определенного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур (криволинейной трапеции и криволинейного сектора). Вычисление объема и площади поверхности тела. Вычисление длины гладкой дуги. Приложения определенного интеграла в физике.

Тема 10. Несобственные интегралы

Понятие несобственного интеграла. Сходимость несобственного интеграла. Несобственный интеграл I рода. Несобственный интеграл II рода.

РАЗДЕЛ IV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Тема 11. Дифференциальные уравнения первого порядка

Основные понятия. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Некоторые типы дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, линейные, однородные). Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Поле направлений.

Тема 12. Дифференциальные уравнения высших порядков

Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные уравнения n-ного порядка. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

РАЗДЕЛ V. РЯДЫ

Тема 13. Числовые ряды

Числовой ряд и его частичные суммы. Сходящиеся ряды. Сложение рядов и умножение ряда на число. Остаток сходящегося ряда. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами. Сравнение рядов. Признаки Даламбера и Коши. Интегральный признак сходимости. Знакочередующиеся и знакопеременные ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Перестановка членов в рядах.

Тема 2. Функциональные ряды

Функциональный ряд. Область сходимости. Признаки равномерной и абсолютной сходимости. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.

Тема 3. Степенные ряды

Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Некоторые приложения степенных рядов.

4. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Общие методические рекомендации

Согласно учебного плана организация учебной деятельности по дисциплине «Математический анализ» предусматривает следующие формы: лекция, практическое занятие, контрольная работа. Успешное изучение курса требует от студентов посещения лекций, активной работы на семинарах, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления основной и дополнительной литературой.

4.2 Методические рекомендации по подготовке к лекциям

Курс лекций строится на основе четких понятий и формулировок, так как только при таком походе студенты приобретают культуру абстрактного мышления, необходимую для высоко квалифицированного специалиста в любой отрасли знаний. Необходимо избегать механического записывания текста лекции без осмысливания его содержания.

4.3. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

При подготовке к практическим занятиям студент должен просмотреть конспекты лекций, рекомендованную литературу по данной теме и выполнить заданную домашнюю работу.

4.4. Методические указания к самостоятельной работе студентов

Для успешного усвоения дисциплины необходима правильная организация самостоятельной работы студентов. Эта работа должна содержать:

– регулярную (еженедельную) проработку теоретического материала по конспектам лекций и рекомендованной литературе;

– регулярную (еженедельную) подготовку к практическим занятиям, в том числе выполнение домашних заданий;

– подготовка к контрольной работе;

Критерием качества усвоения знаний могут служить аттестационные оценки по дисциплине и текущие оценки, выставляемые преподавателем в течение семестра.

В течение преподавания дисциплины «Математический анализ» студенты используют материалы, размещенные в СЭО БГПУ.

4.5. Методические указания к зачету

Рабочая программа содержит программы экзамена и зачетов, которая позволит наиболее эффективно организовать подготовку к ним. Это процесс, в течение которого проверяются полученные знания за семестр: уровень теоретических знаний; развитие творческого мышления; навыки самостоятельной работы; умение синтезировать полученные знания и применять их в решение практических задач.

4.6. Методические указания к экзамену

Подготовку к экзамену наиболее рационально осуществлять путем повторения и систематизации курса «Математический анализ» с помощью кратких конспектов. При работе с теоретическим материалом студент должен уяснить наиболее важные идеи каждой темы, уметь пользоваться основными понятиями и утверждениями (знать их формулировки, демонстрировать их использование на примерах, понимать условия применения и т.д.). Как правило, каждая тема, изученная в рамках курса, содержит ряд основных задач, приемами и методами решения которых должен владеть студент.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине (1 семестр)

№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
	РАЗДЕЛ I. Введение в анализ		
1.	Тема 1. Действительные числа	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Изучение лекционного материала.	8
2.	Тема 2. Функции	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Конспектирование по учебникам	12
3.	Тема 3. Предел функции	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Индивидуальное задание по теме «Пределы»	24
4.	Тема 4. Непрерывность функции	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Коллоквиум	10
	ИТОГО		**54**

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине (2 семестр)

№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
	РАЗДЕЛ II. Дифференциальное исчисление функции одной переменной		
1.	Тема 5. Производная и дифференциал	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Изучение лекционного материала Контрольная работа: вычисление производных	18
2.	Тема 6. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Изучение лекционного материала. Самостоятельная работа	14

	РАЗДЕЛ III. Интегральное исчисление функции одной переменной		
3.	Тема 7. Неопределенный интеграл	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Изучение лекционного материала. Контрольная работа	22
	ИТОГО		**54**

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине (3 семестр)

№	**Наименование раздела (темы)**	**Формы/виды самостоятельной работы**	**Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом**
	РАЗДЕЛ III. Интегральное исчисление функции одной переменной		
1	Тема 8. Определенный интеграл	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Изучение лекционного материала	8
2	Тема 9. Приложения определенного интеграла	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Изучение лекционного материала. Индивидуальное задание	9
	РАЗДЕЛ IV. Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений		
3	Тема 11. Дифференциальные уравнения первого порядка	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Изучение лекционного материала Индивидуальное задание	19
	ИТОГО		**36**

5. ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
1 СЕМЕСТР

Практическое занятие №1 «Тема 1. Действительные числа» (Множества на числовой прямой)»

1час занятия проводится в интерактивной форме (коллоквиум): студенты работают в парах, задают друг другу вопросы, касающиеся множеств на числовой прямой (ограниченность множеств, супремум, инфимум множеств, теорема о существовании инфимума и супремума), затем выходят к доске и отвечают на вопросы одногруппников.

Примерные задания:

1. Запишите с помощью кванторов определение ограниченности множества. Постройте контропределение.
2. Ограничены ли (ограничены сверху, ограничены снизу) следующие множества? Найдите супремум и инфимум множеств, если они существуют:
   а) $\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n} | n\epsilon N\}$; б) $\left\{\frac{1}{n}\middle| n\epsilon N\right\}$; в) $\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\middle| n\epsilon N\right\}$; г) $\left\{\frac{1}{x}+x\middle| x\epsilon R_+\right\}$; д) $\{sin\beta n | n\epsilon N\}$, е) $\left\{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\middle| n\epsilon N\right\}$;
   ж) дроби вида $0, a_1 a_2 \dots$, в записи которых отсутствует цифра 9;
   з) дроби вида $0, a_1 a_2 \dots$, в записи которых отсутствует цифра 8.

Практическое занятие №2 «Тема 1. Действительные числа» (Рациональные и иррациональные числа. Модуль)»

<u>Примерные задания:</u>

1. Вычислите: $\dfrac{2,(7)+3,(2)}{8,(72)-7,(61)+0,(8)}$.

2. На координатной прямой найдите точки, соответствующие числам: 0,8(3); $\sqrt{3}$; $\sqrt{6,25}$; $\dfrac{3}{7}$.

3. Расположите числа в порядке возрастания: $\dfrac{41}{180}$; $\dfrac{5}{2}$; 0,(227); 0,227227722777…; 0,227(7).

4. Докажите иррациональность чисел: $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt{3}+\sqrt{5}$; $\lg 5$; 0,121122111222...

5. Укажите два иррациональных числа, таких что: а) их сумма рациональна; б) их произведение рационально; в) их частное иррационально.

6. Решить уравнение: $|x-6|=|x^2-5x+9|$.

7. Решите уравнение: $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}=6$.

Практическое занятие № 3 «Тема 1. Действительные числа» (Модуль. Неравенства с модулем)»

1час занятия проводится в интерактивной форме: студенты работают в парах, решая неравенства с модулем, затем решения обсуждаются в группе.

<u>Примерные задания:</u>

1. Решить неравенство: $||x-2|+4|>7$.

2. Решить неравенство: $|2x-2|>x+3$.

3. Решите неравенство: $|x-1|+|x-2|<2x-3$.

4. Решите неравенство: $\frac{|2x^2-11x+10|-x^2}{|6x^2-11x+4|-1}\le 0$.

5. Решите неравенство: $\frac{||x^2-x|-1|-1}{||4x+3|-2|-1}\ge 0$.

6. При каких значениях параметра a неравенство $x^2-|x-a|-|x-1|+3\ge 0$ выполняется при всех значениях x?

Практическое занятие № 4 «Тема 2. Функции (Функции, область определения, график)»

<u>Примерные задания:</u>

1. Задайте функцию, тождественную указанной, так, чтобы в ее аналитической записи не использовался знак модуля: $y = |x+3| + |x+2|$. Постройте график функции. Решите неравенства: $f(x) \ge 5$, $f(x) > 1$.

2. Постройте графики функций:

1) $f(x) = \left|x^2 - 4x - 12\right|$; 2) $f(x) = x^2 - 4|x| - 12$;

3) $f(x) = \left|x^2 - 4|x| - 12\right|$; 2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \le 0 \\ 2, & 0 < x \le 2 \\ x, & x > 2 \end{cases}$, $f(2)$, $f(-4)$ -?

3) $f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{x-1}}$;

4) $f(x) = \cos x - |\cos x|$; 5) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; 6) $f(x) = x \sin x$; 7) $f(x) = \sqrt{\sin x}$;

8) $f(x) = \left|\dfrac{x+2}{x+4}\right|$; 9) $f(x) = \dfrac{|x|+2}{|x|+4}$; 10) $f(x) = 3^x - 1$;

11) $f(x) = 3^{x-1} - 1$; 12) $f(x) = \left|2|x| - 1\right|$.

3. Найдите области определения функций: 1) $f(x) = \lg(x^2 - 1)$;

2) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + \lg\dfrac{x+1}{x-2}$; 3) $f(x) = \arccos\dfrac{x^2 - 4}{5} + \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$;

4) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[8]{2-x}$; 5) $f(x) = \dfrac{\lg(3x)}{(x-3)\lg(x-1)}$;

6) $f(x) = \arcsin\dfrac{x+8}{3} + \sqrt{x-3}$; 7) $f(x) = \lg(2\cos x + 1)$.

4. Покажите, что уравнение не имеет решений: $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-5} = 1$.

6. Дана функция $F(x) = x^3 + 2$. Найдите $F^3(x) - 1$, $F(a+3b)$, $F(x+10)$, $F(a) + 3F(b)$.

Практическое занятие № 5 «Тема 2. Функции (Свойства функций)»

Занятие проводятся в интерактивной форме: студенты разбиваются на подгруппы и работают со школьными учебниками 10 классов. В процессе работы классифицируются задачи школьных учебников по теме «Функции», решаются наиболее интересные с точки зрения студентов задачи. В конце занятия подводятся краткие итоги работы.

Практическое занятие № 6 «Тема 2. Функции (Свойства функций)»

Примерные задания

1. Является ли приведенная функция обратимой? Если да, то напишите аналитическое выражение, найдите область определения и множество значений, постройте график соответствующей обратной функции:

1) $f(x) = -x^3 + 1,\ x \in R$; 2) $f(x) = \sqrt{x-2},\ x \in [2, +\infty)$; 3) $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2},\ x \in [1, +\infty)$.

2. Покажите, что функция $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x-2}$ обратна самой себе. Какова особенность графика функции, обратной самой себе?

3. Исследуйте функции на четность или нечетность:

1) $f(x)=2x^4-x^2+1$; 2) $f(x)=3x^3+x$; 3) $f(x)=3x^3+x-5$;

4) $f(x)=\sqrt{x}$; 5) $f(x)=\sqrt{x^2}$; 6) $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{2+\cos x}$;

7) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$; 8) $f(x)=\log_a(x+\sqrt{x^2+1}),\ a>0$;

9) $f(x)=2x^4-x^2+1+e^{x^2}$; 10) $f(x)=\dfrac{\cos x^3+7x^{10}}{x^4+\sin^2 x^3}$.

4. Представьте каждую из функций в виде суммы четной и нечетной функций: 1) $f(x)=2x^3+x^2-x+3$; 2) $f(x)=x(x^2+x+1)$; 3) $f(x)=2x-3$.

5. Приведите примеры монотонных функций.

6. Докажите, что: 1) функция, являющаяся суммой двух возрастающих функций, возрастает; 2) функция, являющаяся суммой двух убывающих функций, убывает; 3) если f и g возрастают и положительны на некотором промежутке, то $f\cdot g$ также возрастает и положительна на этом промежутке; 4) если f возрастает, то $-f$ убывает; 5) если $f>0$ и возрастает, то $\dfrac{1}{f}$ убывает; 6) композиция двух убывающих функций есть функция возрастающая.

7. Исследуйте на возрастание и убывание функции: 1) $f(x)=x^4+6x^2+1$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-1},\quad x\neq 1$,

4) $f(x)=\log_{0,3}\left(x^2-6x+10\right)$; 5) $f(x)=\log_3\left(x^2-6x+8\right)$.

8. Определите, является ли функция периодической и укажите ее период:

1) $f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$; 2) $f(x)=\cos\pi x$; 3) $f(x)=\sin\dfrac{2x+1}{2}$; 4) $f(x)=2^{\sin x}$;

5) $f(x)=2x-[2x]$; 6) $f(x)=3^{|\cos x|}$.

9. Может ли убывающая на всей числовой прямой функция быть периодической? Может ли периодическая функция иметь обратную?

10. В отношении каждой из функций выясните, ограничена ли она или не ограничена на указанном промежутке. Если функция ограничена сверху (снизу), найдите ее точную верхнюю (нижнюю) грань:

1) $f(x)=x^2+2,\quad x\in[-1;3]$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1},\quad x\in R$;

3) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4},\quad x\in(-2;2)$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4},\quad x\in[-1;1]$;

5) $f(x)=\lg(x^2-4x+3),\quad x\in(3;+\infty)$.

Практическое занятие № 7 «Тема 2. Функции (Свойства функций)»

Примерные задания

1. При каких значениях параметра a уравнение $8x^6+(a-x)^3+2x^2+a=x$ имеет хотя бы один корень?

2. При каких значениях параметра a уравнение $3x+\big|2x+|a-x|\big|=7|x+2|$ имеет хотя бы один корень?

3. При каких значениях параметра a любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$

принадлежит промежутку [1; 3]?

4. При каких значениях параметра a уравнение $\left|\frac{x(2^x-1)}{2^x+1}+2a\right| = a^2+1$ имеет нечетное число корней?

5. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2\,\mathrm{a}\cdot\sin(cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень?

Практическое занятие № 8 «Тема 3. Предел (Предел функции в точке)»

Примерные задания

1. Запишите определение предела на языке «$\varepsilon-\delta$»:

1) $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow$ ...

2) $5 = \lim\limits_{x\to -2} f(x) \Leftrightarrow$ ...

3) $A = \lim\limits_{x\to x_0} (4x-1) \Leftrightarrow$ ...

4) $7 = \lim\limits_{x\to 1}(3x+4) \Leftrightarrow$ ...

2. Вставьте пропущенные записи:

1) $*** = \lim\limits_{x\to -1} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \big|\ \forall x\in D(f)\ из *** \Rightarrow |f(x)+2|<\varepsilon$

2) $*** = \lim\limits_{x\to ***} f(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \big|\ \forall x\in D(f)\ из\ 0<|x+3|<0 \Rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$

3) $*** = \lim\limits_{x\to ***} (3x^2+1) \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \big|\ \forall x\in D(f)\ из\ 0<|x+5|<\delta \Rightarrow ***$

4) $3 = \lim\limits_{x\to ***} *** \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \big|\ \forall x\in D(f)\ из\ 0<|x-6|<\delta \Rightarrow \left|x^2-6\right|<\varepsilon$

3. Докажите по определению, что: а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2+5\right)=6$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+1}{x+5}=-\dfrac{1}{3}$.

4. Вычислите пределы функций, если известно, что $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=5$:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\left(4f(x)-2g(x)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 3} f^2(x)$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4f(x)}{g(x)-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2g(x)-3f(x)}{g(x)-f^2(x)}$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}+f^2(x)\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\left(f(x)-2g(x)\right)^3$.

5. Дайте графические иллюстрации следующим предельным соотношениям:

а) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=-2$; б) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$.

6. Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-3x+x^5\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4-2x^2+1}{10x^5-x^3+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4+3x^2-1}$

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+3x^2+2}{x^3+1}$ 5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-25}$ 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-4}$

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 8) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ 9) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$

10) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$ 11) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$ 12) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$

Практическое занятие № 9 «Тема 3. Предел (Эквивалентность бесконечно малых)»

Примерные задания

Вычислите:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot tg2x}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\cos x-1}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} ctg3x\cdot\left(\sqrt{x+9}-3\right)$ 5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2x}$ 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x-\sin 2x}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x+x\cdot tg5x}$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$ 9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$

10. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}-2\cos x}$ 11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+7x^2\right)}{\sin^2 x}$ 12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-1}{x\ln 8}$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$ 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{1-\cos x}$

16. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$ 17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7^x-3^x}{\sin x}$ 18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x-\sin 3x}{6x-\sin 2x}$

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^3tgx-\cos x^2}{\sin x^4}$ 20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-\ln\left(1+x^2\right)-1}{x}$

21. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\log_3 x-1}{x-3}$

Практическое занятие № 10 «Тема 3. Предел (Предел функции на бесконечности и его вычисление. Односторонние пределы)».

Примерные задания

Дайте графические иллюстрации следующим предельным соотношениям:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; в) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=4$; г) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$.

Вычислите:

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-3}{x^2+5}$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+6x-3}{x^4+5}$ 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+6x+6}{x^2+1}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$ 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4+16x^2+1}+3x^2}{x^2+5}$

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^3+4x-3)(x^2+x)}{(x^2+5)(x^2+x^3-1)}$ 8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)$ 10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$ 11. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}+\dfrac{3}{x}-2\right)$ 13. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x(1-x)^2}-x\right)$ 14. $\lim\limits_{x\to\infty} 3x^4\sin\dfrac{8}{x^4}$

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+3x-2}}{\sqrt{25x^2-6x+5}}$

Односторонние пределы

1. Найдите односторонние пределы $\lim\limits_{x\to 1+} 5^{\frac{4}{x-1}}$, $\lim\limits_{x\to 1-} 5^{\frac{4}{x-1}}$ и схематично изобразите график функции $y = 5^{\frac{4}{x-1}}$.

2. Определите односторонние пределы функции *f(x)* в точке x_0, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le 2 \\ -2x+1, & x > 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$; б) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{|x-1|}$, $x_0 = 1$;

в) $f(x) = \dfrac{x}{(x-3)^3}$, $x_0 = 3$; г) $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < 0 \\ x-1, & 0 \le x \le 1, \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$ $x_0 = 1$.

Для каких из этих функций существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$?

3. Постройте в окрестности точки x_0 график функции *f(x)*, удовлетворяющей условиям:

а) $\lim\limits_{x\to -1-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to -1+} f(x) = 0$, $f(-1) = 1$;

б) $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = -1$, $f(0) = -1$;

г) $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = 2$, $f(1) = 2$.

Практическое занятие № 11 «Тема 3. Предел (Предел числовой последовательности)»

Занятие проходит в интерактивной форме: студенты в малых группах решают задания. Каждые полчаса преподаватель осуществляет опрос и корректирует работу.

Примерные задания

1. Укажите номер члена последовательности (x_n), $x_n = \dfrac{5n+3}{2n}$, начиная с которого все члены последовательности удовлетворяют условию $|x_n - 2{,}5| < 0{,}01$.

Дайте геометрическое истолкование полученного результата.

2. Найдите номера членов последовательности (x_n), $x_n = \dfrac{2n+3}{n}$, принадлежащих окрестности точки 2 радиуса 0,01.

3. Используя определение предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n} = 1{,}5$.

3. В некоторой окрестности точки 3 обнаружено бесконечное множество членов последовательности (x_n). Следует ли из этого, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$?

4. Приведите пример последовательности, удовлетворяющей условиям: а) (x_n) возрастает и сходится к 1; б) (x_n) убывает и сходится к 3; в) (x_n) сходится к 5 и содержит бесконечное число членов, больших 5, и бесконечное число членов, меньших 5.

5. Известно, что у последовательности (x_n) есть подпоследовательность, сходящаяся к числу a. Верно ли, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$? Приведите примеры.

6. Докажите, что последовательности не имеют предела: 1) (x_n), $x_n=(-1)^n$; 2) (x_n), $x_n=(-1)^n+1$.

Вычислите пределы последовательностей:

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+1}$ **8.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{n^2+1}$ **9.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-3)(n+5)}{n^2-3n+1}$

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}-\dfrac{n}{n-1}\right)$ **11.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{2n-1}\cdot\dfrac{2n+1}{4n-1}\cdot\dfrac{n^2-3n+1}{5n+1}\right)$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{2n^2+1}\cdot\cos\dfrac{n+1}{2n-1}\right)$ **13.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}}$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)$

15. Вычислите предел последовательности (x_n), если

а) $x_n=2-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{16}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2^{n-2}}$; б) $x_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{n^2}$;

в) $x_n=\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\dfrac{1}{7\cdot10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

16. Вычислите пределы последовательностей, если известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ существует:

а) $x_1=\sqrt{2},\quad x_{n+1}=\sqrt{2+x_n},\quad n\ge1$; б) $x_1=\sqrt{3},\quad x_{n+1}=\sqrt{3+x_n},\quad n\ge1$;

в) $x_1=\dfrac{1}{2},\quad x_{n+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x_n^2}{2},\quad n\ge1$

Практическое занятие № 12 «Тема 3. Предел (Второй замечательный предел)»

Примерные задания

Вычислите пределы:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{n^2+1}\right)^n$ **2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n^6+1}{n^6+7}\right)^{\frac{n^3+2}{n^3+3}}$ **3.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6n^6+1}{n^6+7}\right)^{\frac{n^2+2}{n+3}}$

4. $\lim\limits_{x\to0}(1+tgx)^{ctgx}$ **5.** $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\sin 2x)^{tg^2 2x}$ **6.** $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin\pi x)^{ctg\pi x}$

7. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^{\frac{6-5x}{x}}$ **8.** $\lim\limits_{x\to0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$ **9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^6+1}{x^6+7}\right)^{\frac{x^3+2}{x^2+3}}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-3}\right)^{3x+1}$ **11.** $\lim\limits_{x\to\infty}(16-3x)^{\frac{1}{x-5}}$ **12.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+tg2x}{1-\sin 5x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Практическое занятие № 13 «Тема 3. Предел (Вычисление пределов)»

Занятие проходит в интерактивной форме: студенты разбиваются на пары и работают над вычислением пределов всех типов. У каждой пары отдельный вариант.

Варианты могут быть даны из учебного пособия:

Ермак Н.В. Избранные вопросы математического анализа. Предел функции и непрерывность /Н.В. Ермак, И.В. Квасова, Л.В. Насонова, В.В. Попов. – Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2007. – 116 с.

Практическое занятие № 14 «Тема 4. Непрерывность функции (коллоквиум)»

Коллоквиум проводится по теоремам, описывающим свойства функций, непрерывных в точке и на множестве.

1. Определения непрерывной функции в точке и на множестве.
2. Точки разрыва и их классификация.
3. Первая теорема Больцано-Коши.
4. Вторая теорема Больцано-Коши.
5. Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной функции)
6. Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной функцией своих нижней и верхней граней)
7. Следствия из теорем.

Практическое занятие № 15 «Тема 4. Непрерывность функции»

Занятие проходит в интерактивной форме. Студенты в малых группах работают по заданиям в карточках.

КАРТОЧКА 1

1. Можно ли утверждать, что функция, определенная во всех точках отрезка, будет ограничена на нем? Приведите примеры.
2. Всегда ли функция, определенная во всех точках отрезка и ограниченная на нем, достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значения? Приведите примеры.
3. Можно ли утверждать, что функция, непрерывная на отрезке, достигает на этом отрезке наибольшего (наименьшего) значения лишь в единственной точке?
4. Докажите существование обратной функции для функции $f(x)$, где

а) $f(x)=2x+1,\ x\in R$, б) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in[0;+\infty)$, в) $f(x)=4x+arctgx$, $x\in R$.

5. Найдите выражение обратной функции для функции $f(x)$, где:

а) $f(x)=\dfrac{4-x}{3+x}, x\neq 3$; б) $f(x)=4x-x^2,\quad x\geq 2$; в) $f(x)=4x-x^2,\quad x\leq 2$.

КАРТОЧКА 2

1. Существует ли непрерывная функция, отображающая отрезок $[a,b]$ на всю числовую прямую?
2. Существует ли непрерывная функция, отображающая отрезок $[a,b]$ на интервал (a,b)?
3. Существует ли непрерывная функция, отображающая отрезок $[a,b]$ на множество $M=[0;1]\cup[3;4]$?
4. Известно, что $f(1)=3,\ f(2)=5$. Можно ли утверждать, что на отрезке $[1;2]$ уравнение $f(x)=0$ не имеет решений? Какое условие для функции $f(x)$ следует добавить, чтобы это утверждение было верным?
5. Имеют ли данные уравнения корни на указанных отрезках: а) $x^2+3x+1=0,\quad[-1;0]$, б) $x^2-3x+1=0,\quad[-2;3]$, в) $3\sin^3 x-5\sin x+1=0,\quad\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$?

6. Найдите с точностью до 0,01 корень уравнения $x^3-3x+1=0$, лежащий на отрезке $[1;2]$.

7. Докажите, что уравнение $x^3+3x-7=0$ имеет только один действительный корень.

КАРТОЧКА 3

1. Можно ли утверждать, что функция, определенная на некотором отрезке и принимающая на концах этого отрезка значения разных знаков, будет в некоторой точке отрезка принимать значение, равное нулю? Приведите примеры.

2. Может ли функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$ и принимающая значение, равное нулю, лишь в единственной точке интервала (a,b), не принимать на отрезке $[a,b]$ значений разных знаков?

3. Функция $f(x)$ не определена в точке $x=0$. Постройте функцию $F(x)=\begin{cases} f(x), \ x\neq 0 \\ A, \ x=0 \end{cases}$ так, чтобы она была непрерывна в точке $x=0$, если $f(x)=\dfrac{\arcsin x}{2tgx}$.

4. Принимает ли функция $f(x)=\begin{cases} -x^2+1, & -1\le x<0 \\ 0, & x=0 \\ x^2-1, & 0<x\le 1 \end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения на отрезке $[-1;1]$?

5. Для функции $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & 0\le x<2 \\ (x-4)^2+6, & 2\le x\le 4 \end{cases}$ имеем $f(0)=-4$, $f(2)=10$, $f(4)=6$. Существует ли значение c такое, что $f(c)=1$ и $f(c)=7$?

КАРТОЧКА 4

1. Множество значений функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a,b]$, есть отрезок. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$?

2. Может ли функция, непрерывная на множестве M, принимать на этом множестве только два различных значения, если: а) M – отрезок; б) $M=[-1;2]\cup[4;5]$; в) $M=[0;1]\cup\{3\}$?

3. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности обратной функции. Будет ли она справедлива, если а) убрать требование монотонности функции, б) убрать требование непрерывности функции? Приведите примеры.

4. Является ли функция $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x<1 \\ 6-2x, & 1\le x\le 2 \end{cases}$ обратимой на $[0;2]$? Ответ поясните.

5. Постройте графики функций:
а) $f(x)=\sin(\arcsin\ x)$, б) $f(x)=\arcsin(\sin\ x)$.

Практическое занятие № 16 «Тема 4. Непрерывность функции»

На занятии студенты представляют решения наиболее интересных и сложных заданий предыдущего занятия.

<u>Дополнительные задания</u>

1. Исследуйте на непрерывность функцию $y=\sin x$.

2. Исследовать функции на непрерывность, указать точки разрыва и их род. Построить графики функций:

а) $f(x)=\begin{cases}\lg|x|, & x<0\\ 2, & 0\le x<1\\ 3^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$; б) $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$; в) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\ne 1\\ 3, & x=1\end{cases}$

I курс

2 СЕМЕСТР

Практическое занятие № 1 «Тема 5. Производная и дифференциал (Дифференцируемость функций)»

Примерные задания

1. Найдите производные функций по определению: а) $y=sin2x$ б) $y=\sqrt{2x-3}$

2. Дифференцируемы ли функции в точке $x_0=1$:

а) $f(x)=5(x-1)$; б) $f(x)=5|x-1|$; в) $f(x)=5|x-1|^2$;

г) $f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$?

3. Пусть $F(x)=\begin{cases}x^3, & x\le x_0\\ ax+b, & x>x_0\end{cases}$. Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция F была непрерывной и дифференцируемой в точке x_0?

4. Пусть функции f и g не имеют производной в точке x_0. Следует ли отсюда, что в этой точке не имеют производной функции $f+g$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$? Разберите примеры:

а) $f(x)=|x|,\quad g(x)=-|x|$, $x_0=0$;

б) $f(x)=g(x)=|x|,\quad x_0=0$; в) $f(x)=g(x)=|x|+1$, $x_0=0$.

5. В каких точках нельзя провести касательные к графикам функций:

а) $y=|x-1|+|x-2|$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}$; в) $y=\left|x^2-x\right|$?

6. Докажите, что функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0=0$:

а) $f(x)=\begin{cases}x^3, & x<0\\ x^2, & x\ge 0\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$.

7. Покажите, что функции не имеют производной в указанной точке:

а) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ 2x+1, & x\ge 0\end{cases}$, $x=0$; б) $f(x)=|\ln x|,\quad x=1$.

Практическое занятие № 2 «Тема 5. Производная и дифференциал (Правила дифференцирования. Дифференцирование сложной функции)»

Примерные задания

Найдите производные функций:

1. $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ **;** **2.** $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ **;** **3.** $y=\dfrac{3x-1}{x^5}$ **;**

4. $y = x\sqrt{x^2+1}$ **;** **5.** $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$ **;** **6.** $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ **;**

7. $y = \log_2(x^2+3)$ **;** **8.** $y = \ln(x+\sqrt{x^2+a})$ **;** **9.** $y = 2^x + x^2$ **;**

10. $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}} arctg\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ **;** **11.** $y = arctg\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ **;** **12.** $y = \log_2 tg\dfrac{2}{x^2}$;

13. $y = \ln tg\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$; **14.** $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$;

15. $y = x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}} + arctg\sqrt{x} - \sqrt{x}$; **16.** $y = \log_{x^2} 2 + 2^{x^2}$;

17. $y = e^{x^2}\left(x^3 - x\right)$; **18.** $y = (x-1)\sqrt[3]{(x+1)^2(x-2)^{-1/5}}$.

Найдите значения производных в указанных точках:

19. $f(x) = \dfrac{x\ln x}{e^{x^2}}$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $f'\left(a^2\right)$.

20. $f(x) = 2\sqrt{3} arctg\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \ln\sqrt{x^2+3}$, $x = 3$.

21. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x^2}$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

22. Выведите формулу для $(u\cdot t\cdot n)'$, где $u = u(x)$, $t = t(x)$, $n = n(x)$.

23. Докажите, что функция $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ удовлетворяет уравнению $\left(1-x^2\right)f'(x) - x\cdot f(x) = 1$.

Практическое занятие № 3. «Тема 5. Производная и дифференциал (геометрический и механический смысл)»

Занятие проводится в интерактивной форме. Студенты в малых группах решают задачи. Преподаватель корректирует работу подгрупп.

Примерные задания

1. Найдите уравнения касательных к графику функции $f(x) = x^2 - 4x$ 1) в точке $x_0 = 1$, 2) в точках с ординатой $y_0 = -3$.

2. Докажите, что касательные к кривой $y = 5x^3 + 7x - 100$ в любой ее точке составляют с положительным направлением оси О*x* острый угол.

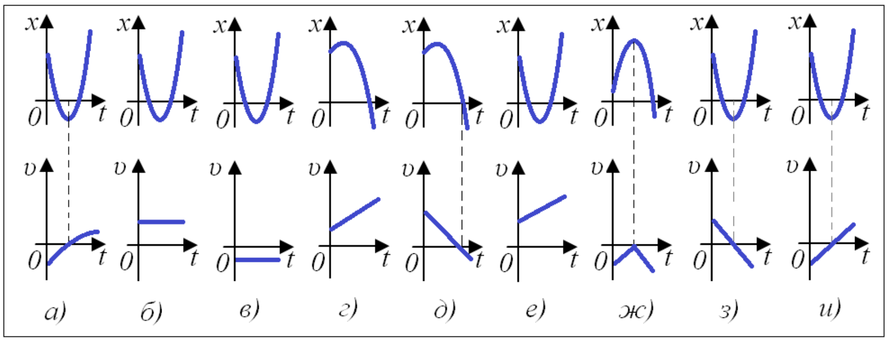
3. Прямая $y = -3x + 1$ параллельна некоторой касательной к параболе $y = x^2 - x$. Найдите координаты точки касания.

4. Число $x = 1$ не является корнем уравнения $x^2 - x = 2x - \dfrac{x^2}{2}$, но является корнем уравнения, полученного приравниванием производных его левой и правой частей. Объясните геометрический смысл указанного факта.

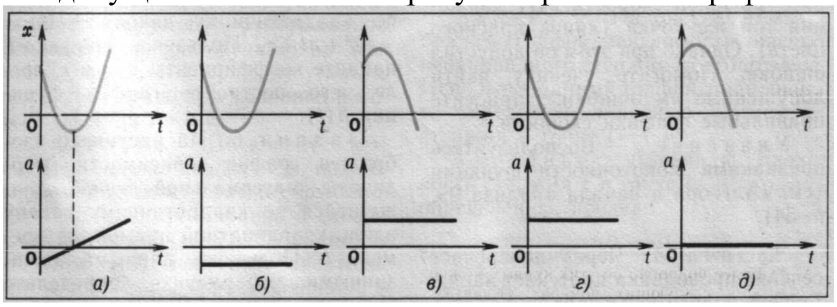
5. Касается ли прямая $x + 4y - 4 = 0$ гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$?

6. На каждом из рисунков (*а-и*) изображены графики зависимости от времени t координаты *x(t)* и скорости $\upsilon(t)$ материальной точки, движущейся по закону

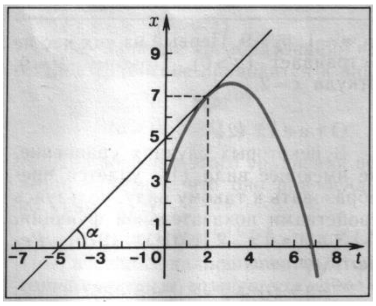
$x(t) = pt^2 + qt + r$ вдоль координатной прямой. Восемь из девяти графиков скорости неверные. В чем состоят допущенные ошибки? Найдите правильный рисунок.



7. На каждом из рисунков (*а-д*) схематически изображены графики зависимости от времени координаты *x(t)* и ускорения *a(t)* материальной точки, движущейся вдоль координатной прямой по закону $x(t) = pt^2 + qt + r$. Известно, что при построении некоторых графиков ускорения допущены ошибки. Установите, какие из рисунков правильны, а какие нет. В чем заключаются допущенные ошибки? Нарисуйте правильные графики.



8. На рисунке изображен график зависимости координаты материальной точки, движущейся по квадратичному закону вдоль координатной прямой, от времени *t*. Пользуясь данными, показанными на рисунке, определите значение скорости υ точки в момент *t*=2 с.



9. Из пункта О по двум прямым, наклоненным под углом 60^0 друг к другу, движутся два тела. Первое тело движется равномерно со скоростью 5 км/ч. Закон движения второго тела определяется формулой $s_2 = 2t^2 + t$, где s_2 выражено в километрах, а t – в часах. Определите, с какой скоростью они удаляются друг от друга в момент, когда первое тело находится от пункта О на расстоянии 10 км.

10. Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 + t + 1$. Координата x измеряется в сантиметрах, время t – в секундах. Найдите: а) действующую силу, б) кинетическую энергию E тела через 2 с после начала движения.

11. По прямой движутся две материальные точки по законам $x_1(t) = 4t^2 - 3$ и $x_2(t) = t^3$. В каком промежутке времени скорость первой точки больше скорости второй точки? Постройте графики движения и поясните на графике полученные результаты.

Практическое занятие № 4. «Тема 5. Производная и дифференциал (Дифференцирование показательно-степенных и неявно заданных функций)»

Примерные задания

Найдите производные неявно заданных функций:

1. $y^2 = x^2$. **2.** $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. 28**.** $xy=2$.

3. $x+\sqrt{xy}+y=a$. **4.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\quad y'(4)-?$

5. $x^2+3xy+y^2+1=0$, найдите y' в точке $(2,-1)$.

6. $arctg\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

7. Напишите уравнения касательной и нормали к кривой $xy+ln\,y=1$ в точке $M(1;-1)$.

8. Найдите производные от показательно-степенных функций:

9. $y=x^{\frac{x}{\ln^2 x}}$. **10.** $y=\left(\sqrt{tgx}\right)^{x+1}$. **11.** $y=(\ln x)^x : x^{\ln x}$. **12.** $y=f\left(e^x\right)\cdot e^{f(x)}$.

Практическое занятие № 5. «Тема 5. Производная и дифференциал (Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях._Производные и дифференциалы высших порядков)»

Занятие проводится в интерактивной форме. Студенты в малых группах решают задачи. Преподаватель корректирует работу подгрупп.

Примерные задания

Найдите дифференциалы функций:

1. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^3-1}$; **2.** $f(x)=\sqrt{\arcsin 2x}+3^{-x}$; **3.** $f(x)=5^{\sqrt{arctgx^2}}$;

4. $f(x)=\log_x e$.

Найдите приближенно значения:

5. $\sqrt[3]{1{,}02}$; **6.** $\sin 29^0$; **7.** $\cos 151^0$; **8.** $arctg1{,}05$.

9. Площадь S круга радиуса r равна πr^2. Найдите приращение и дифференциал площади и дайте им геометрическую интерпретацию.

10. Материальная точка движется равноускоренно по прямой по закону $S(t)=S_0+v_0t+\dfrac{at^2}{2}$. Найдите дифференциал пути и выясните его механический смысл.

11. Выясните происхождение приближенных формул: $\sqrt{a^2+b}\approx a+\dfrac{b}{2a}$, $\sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\dfrac{b}{3a^2}$.

12. Найдите y'', если: а) $y=x\sqrt{1+x^2}$, б) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, в) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

13. Считая x независимой переменной, найдите d^2y, если: а) $y=\sqrt{1+x^2}$, б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$, в) $y=x^x$.

Практическое занятие № 6. «Тема 5. Производная и дифференциал (Дифференциал функции. Применение дифференциала в приближенных вычислениях._Производные и дифференциалы высших порядков)»

Примерные задания

Найдите производные параметрически заданных функций:

1. $x=t^2,\quad y=2t$; **2.** $x=\cos t,\quad y=t+\sin t$;

3. $x=a\cos^2\varphi,\quad y=b\sin^2\varphi$; **4.** $x=a(\varphi-\sin\varphi),\quad y=a(1-\cos\varphi)$;

5. $x=e^t\sin t,\quad y=e^t\cos t$; **6.** $x=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad y=\arccos\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$;

7. $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}},\quad y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

8. Докажите, что параметрически заданная функция $\begin{cases} x=\ln t-\arcsin t+5 \\ y=t+\sqrt{1-t^2} \end{cases}$ удовлетворяет уравнению $y=y'+\sqrt{1-(y')^2}$.

9. Найдите угловой коэффициент касательной к кривой $\begin{cases} x=t^2-3t+4 \\ y=t^2-4t+4 \end{cases}$ в точке $x=2,\ y=1$.

10. Найдите производные y'_x, y''_{x^2}, от функции $y(x)$, заданной параметрически: а) $x=2t-t^2,\quad y=3t-t^3$, б) $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$.

Практическое занятие № 7 «Тема 6. «Основные теоремы дифференциального исчисления (Основные теоремы. Правила Лопиталя)»

Занятие проводится в интерактивной форме: студенты разбиваются на малые группы и обсуждают решения задач, на втором часе студенты по желанию рассказывают решения задач у доски, одногруппники задают вопросы.

Теорема Ролля

1. Постройте функцию, непрерывную на отрезке $[a,b]$, дифференцируемую во внутренних точках этого отрезка, но такую, что для нее нет точки $c\in(a,b)$, в которой $f'(c)=0$.

2. Постройте функцию, непрерывную на отрезке $[a,b]$, удовлетворяющую условию $f(a)=f(b)$, но такую, что для нее нет точки $c\in(a,b)$, в которой $f'(c)=0$.

3. Можно ли на отрезке $[-1;1]$ применить к функции $f(x)=2-\sqrt[3]{x^2}$ теорему Ролля?

4. Докажите, что все корни производной многочлена $P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ различны.

5. Функция $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^4}$ имеет равные значения на концах отрезка $[-1;1]$, но ее производная не обращается в нуль ни в одной точке этого отрезка. Не противоречит ли это теореме Ролля?

Теорема Лагранжа

6. Выясните механический смысл формулы Лагранжа.

7. В формуле Лагранжа определите значение *c* для функции $f(x)=x^3+3x^2+6$ на отрезке $[1;2]$.

8. На кривой $y=x^2+3x+1$ найдите точку, в которой касательная к кривой параллельна хорде, соединяющей точки A(-1;1) и B(1;5).

9. Докажите, что в формуле Лагранжа на любом промежутке для параболы $y=ax^2$ точка *c* является средней точкой промежутка.

10. Докажите, что $\dfrac{1}{52}<\ln\dfrac{52}{51}<\dfrac{1}{51}$.

11. Докажите справедливость неравенств:

а) $|\sin x_1-\sin x_2|\le|x_1-x_2|$, $x_1,x_2\in R$; б) $arctgx_2-arctgx_1\le x_2-x_1,\ \ x_2>x_1$;

в) $|\ln x_2-\ln x_1|<\dfrac{|x_2-x_1|}{a}$, $x_1,x_2\in[a;+\infty), a>0$.

Теорема Коши

12. Найдите ошибку в следующем «доказательстве» теоремы Коши: пусть функции g и f на отрезке $[a,b]$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Тогда каждая из них будет удовлетворять и условиям теоремы Лагранжа. Следовательно, для них можно записать формулу Лагранжа: $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), a<c<b$, $g(b)-g(a)=g'(c)(b-a),\ a<c<b$. Разделив почленно первое равенство на второе и произведя сокращение, получим формулу Коши: $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

13. Определите значение *c* в формуле Коши для функций:

а) $f(x)=x^3, g(x)=x^2+1$ на отрезке $[1;2]$; б) $f(x)=\sin x, g(x)=1+\cos x$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

14. Пусть гладкая кривая задана параметрически: $x=x(t), y=y(t), t\in[\alpha,\beta]$. В чем состоит геометрический смысл формулы Коши, примененной к функциям $x(t), y(t)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$?

Найдите пределы:

1. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$. **3.** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x+e^{\sin x}}{x+\sin x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$. **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$. **8.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$. **9.** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to+0} x^{x}$. **11.** $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^{x}}$. **12.** $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$. **13.** $\lim\limits_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Практическое занятие № 8 «Тема 6. «Основные теоремы дифференциального исчисления (Экстремумы функций. Выпуклость, вогнутость функций. Наименьшее и наибольшее значения функций)»

1. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функций:

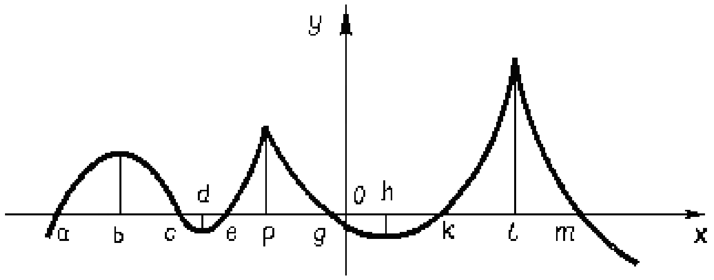
1) $y=\dfrac{x}{\ln x}$, 2) $y=x-2\sin x,\ 0\le x\le 2\pi$, 3) $y=2x^2-\ln x$,

4) $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$, 5) $y=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-12x+2$, 6) $y=\dfrac{14}{x^4-8x^2+2}$,

7) $y=\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x-2}$.

2. По графику функции, изображенному на рисунке, определите:

1) промежутки, где $f'(x)>0$, 2) промежутки, где $f'(x)<0$, 3) точки, где $f'(x)=0$, 4) точки, где $f'(x)$ не существует, 5) точки экстремума.



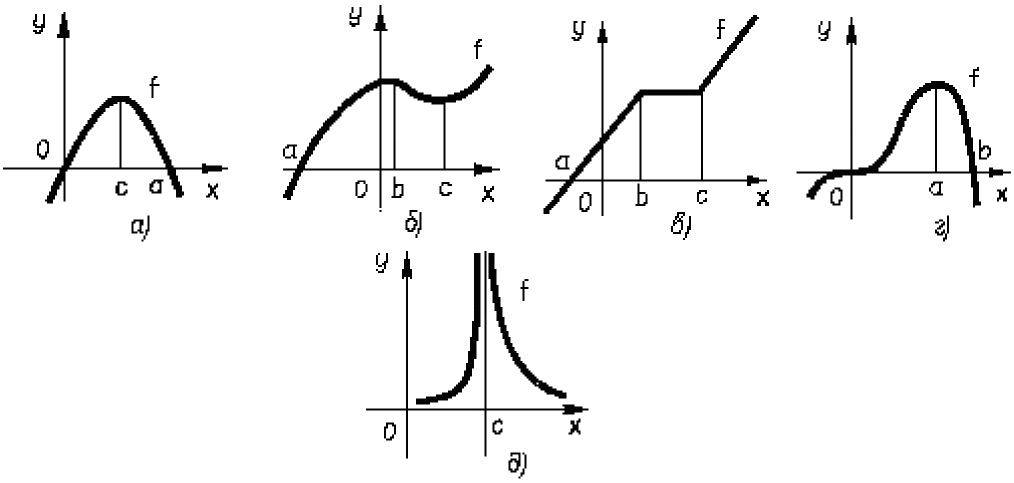
2. Докажите, что функции возрастают на R: 1) $f(x)=x^3+4x$,

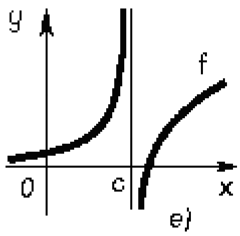
2) $f(x)=x-\sin x$.

3. Докажите, что функции убывают на R: 1) $f(x)=arctgx-x$,

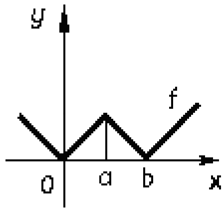
2) $f(x)=\sin x-2x+c$.

4. По графикам функций, изображенным на рисунках, постройте схематические графики их производных.

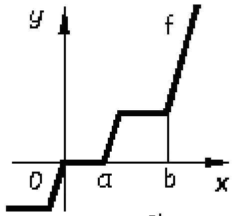




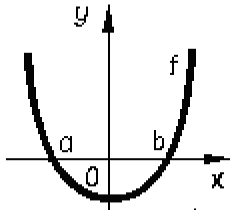
е)



ж)



з)



и)

5. Покажите, что функции всюду вогнуты (выпуклы вниз):

а) $y = x^2 + x^4$, б) $y = (x+1)^4 + e^x$.

6. Найдите промежутки выпуклости (выпуклости вверх), вогнутости (выпуклости вниз), а также точки перегиба графиков функций:

а) $y = x^3 + x$, б) $y = x^4 - 6x^2$, в) $y = \left|x^2 - 1\right|$, г) $y = x \cdot |x|$,

д) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, е) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, ж) $y = x^4(12\ln x - 7)$,

з) $y = e^{\sin x}$, $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

7. Постройте графики функций в окрестности каждой из заданных точек, если:

а) $x = 3,\quad y = 2,\quad y' = -2,\quad y'' < 0$, б) $x = 1,\quad y = 2,\quad y' = 0,\quad y'' < 0$,

в) $x = 1,\quad y = 0,\quad y' = 0,\quad y'' > 0$, г) $x = 1,\quad y = -1,\quad y' = -1,\quad y'' > 0$.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на указанных промежутках:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9,\quad [-1;3]$, б) $f(x) = \sin x + 2\cos x,\quad \left[0; \dfrac{3\pi}{4}\right]$,

в) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2},\quad (0;3]$, г) $f(x) = 2tgx - tg^2 x,\quad \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

9. Число 16 разложите на два слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

10. Найдите такое положительное число, чтобы разность между ним и его кубом была наибольшей.

11. Решите каждое из уравнений, сравнивая наибольшее и наименьшее значения его левой и правой частей: а) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$; б) $2 + \sin x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

12. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега, нужно послать матроса в лагерь, расположенный в 15 км на берегу (считая по берегу реки) от ближайшей к кораблю точки берега. Если матрос может делать пешком 5 км в час, а на веслах 4 км в час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

Практическое занятие № 9 «Тема 6. «Основные теоремы дифференциального исчисления (Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке)»

Занятие проводится в интерактивной форме: студенты разбиваются на малые группы, решая задачи по составлению функций и исследованию их значений.

1. Сигнал с корабля можно различить в море на расстоянии 1 мили. Корабль А идет на юг, делая 3 мили в час, и в настоящее время находится в 5 милях к западу от корабля В, который идет на запад со скоростью 4 мили в час. Будут ли корабли на расстоянии, достаточном для приема сигнала?

2. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг радиуса R так, что одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга, выбран тот, у которого наибольшая площадь. Найдите эту площадь.

3. Из всех прямоугольных параллелепипедов, у которых в основании лежит квадрат и площадь полной поверхности равна 600 см^2, найдите параллелепипед наибольшего объема.

4. Периметр основания прямоугольного параллелепипеда 8 м, а высота 3 м. Какой длины должны быть стороны основания, чтобы объем параллелепипеда был наибольшим?

5. Сечения тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

6. Через точку графика функции $y=\sqrt{x}$ с абсциссой a, где $\frac{1}{2} \le a \le 2$, проведена касательная к этому графику. Найдите значение a, при котором площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и прямой x=3, будет наименьшей, и вычислите эту наименьшую площадь. (Ответ: a=1, S=4)

7. Парабола $y=x^2+px+q$ пересекает прямую $y=2x-3$ в точке с абсциссой 1. При каких значениях p и q расстояние от вершины параболы до оси Ox является наименьшим? Найдите это расстояние. (Ответ: p=-2, q=0, d=1)

8. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 40. Какую длину должны иметь катеты, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

Практическое занятие № 10 «Тема 6. «Основные теоремы дифференциального исчисления (Графики функций)»

Занятие проходит в интерактивной форме. Студенты в малых группах выполняют задания на построения графиков функций, контролируя друг друга, результаты проверяют с помощью графопостроителей в программах GeoGebra или AdvanceGrapher.

Постройте графики функций:

Карточка 1

Постройте графики функций:

1. $y=(x-1)^2(x-2)$ 2. $y=\frac{1-x^2}{4-x^2}$ 3. $y=x+\frac{\ln x}{x}$

Карточка 2

Постройте графики функций:

1. $y=x^3-4x^2+7x-4$ 2. $y=\frac{x}{1-x^2}$ 3. $y=\ln(4-x^2)$

Карточка 3

Постройте графики функций:

1. $y=x(x-1)^3$ 2. $y=\frac{x^2-1}{x^2+4}$ 3. $y=x\ln(1+x^2)$

Карточка 4

Постройте графики функций:

1. $y=4x^2-x^6$ 2. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$ 3. $y=e^{x^2-2x}$

Дополнительно

1. $y=x^3-4x^2+7x-4$. **2.** $y=\frac{1-x^2}{4-x^2}$. 3. $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$. **4.** $y=x^2\ln x$.

Практическое занятие № 11 «Тема 7. «Неопределенный интеграл (Основные методы интегрирования)»

Примерные задания

Найдите интегралы:

1) $\int \frac{6x^3-24x+1}{\sqrt{x}}dx$; 2) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}dx$; 3) $\int \frac{2^x+3^x}{6^x}dx$;

4) $\int tg^2 x dx$; 5) $\int \frac{x^2-2}{x^2+2}dx$; 6) $\int \frac{x^2}{x^2-3}dx$;

7) $\int \frac{dx}{9x^2+45}$; 8) $\int e^x\left(2^x+3^x\right)dx$; 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-4x^2}}$;

10) $\int \frac{dx}{5-3x}$ 11) $\int \frac{dx}{x\ln x}$ 12) $\int \frac{xdx}{1+x^4}$ 13) $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$

14) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ 15) $\int \frac{(\arccos x)^3-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 16) $\int \frac{tg(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$

17) $\int x^3e^{-x^2}dx$ 18) $\int \ln\left(1+x^2\right)dx$ 19) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$ 20) $\int \frac{\cos xdx}{1+\sin x}$

21) $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$.

Практическое занятие № 12 «Тема 7. «Неопределенный интеграл (Основные методы интегрирования)»

Примерные задания

1. $\int \frac{\sin xdx}{(1-3\cos x)^3}$ **2.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$ **3.** $\int \frac{dx}{e^x-1}$ **4.** $\int e^{\sqrt{x}}dx$

5. $\int (5x+6)\cos 2xdx$ **6.** $\int (3x+4)e^{3x}dx$ **7.** $\int x\cdot arctgx\cdot dx$ **8.** $\int \frac{4arctgx-x}{1+x^2}dx$

9. $\int x^2\sin xdx$ **10.** $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$ **11.** $\int \frac{\left(x^2+1\right)dx}{\left(x^3+3x+1\right)^5}$ **12.** $\int x^2\ln xdx$

13. $\int \cos^5 x\cdot\sin xdx$ **14.** $\int \sqrt{2x-3}dx$ **15.** $\int \sqrt{x^3+1}\cdot x^2dx$

16. $\int \sin(\ln x)dx$; **17.** $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$; **18.** $\int e^x\ln\left(e^x+1\right)dx$;

19. $\int x^2e^{3x}dx$; **20.** $\int \frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}dx$

Практическое занятие № 13. «Тема 7 «Неопределенный интеграл (Интегрирование рациональных функций)»

Примерные задания

1. $\int \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$ **2.** $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$ **3.** $\int \frac{x^3}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$

4. $\int \frac{dx}{\left(x^2+8\right)^3}$ **5.** $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$ **6.** $\int \frac{xdx}{x^2+3x+2}$ **7.** $\int \frac{dx}{1+x^3}$

8. $\int \frac{x^4+2x^2}{x^2+1}dx$ **9.** $\int \frac{x^4}{x-1}dx$ **10.** $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$

Практическое занятие № 14. «Тема 7 «Неопределенный интеграл (Интегрирование иррациональных функций)»

Примерные задания

Найдите интегралы:

1) $\int x\sqrt{1+x}dx$; 2) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$; 3) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{2x^2-4x+7}}dx$;

4) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)\sqrt[4]{\frac{x+2}{x-1}}}$; 5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+4}}$; 6) $\int x^3\left(1-x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx$;

7) $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$; 8) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$; 9) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5x+4}}$.

С помощью подстановки Эйлера получите табличный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right|+C$.

Практическое занятие № 15. «Тема 7 «Неопределенный интеграл (Интегрирование иррациональных функций)»

Примерные задания

Найдите интегралы:

1. $\int tg^5 x dx$ **2.** $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ **3.** $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$ **4.** $\int \frac{1+tgx}{\sin 2x}dx$

5. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$ **6.** $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ **7.** $\int \sin^6 x dx$ **8.** $\int \frac{dx}{\sin x}$

9. $\int \sin 3x \cos 10x dx$ **10.** $\int \sin\frac{x}{3}\sin\frac{x}{2}dx$ **11.** $\int \frac{dx}{\cos x}$

12. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$ **13.** $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x}dx$ **14.** $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^4 x}$.

Практическое занятие № 16. «Тема 7 «Неопределенный интеграл (Интегрирование всех типов функций)»

Занятие проводится в интерактивной форме: студенты в парах выполняют задания (с взаимопроверкой) по нахождению интегралов

Найдите интегралы:

1) $\int xe^{-5x}dx$; 2) $\int \frac{\mathrm{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$; 3) $\int \frac{(\cos x+1)dx}{1-\sin x}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+7x+1}}$;

5) $\int e^{4\sin 5x}\cos 5x dx$; 6) $\int \frac{(3x^5-12x^3-7)dx}{x^2+2x}$; 7) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+2}}$.

II курс
3 СЕМЕСТР

Практическое занятие № 1. «Тема 8 «Определенный интеграл (Свойства определенного интеграла)»

Занятие проходят в интерактивной форме: студенты делятся на малые группы и обсуждают решение задач на свойства определенного интеграла (задания 1-9), а также некоторые задания по теме «Определенный интеграл» из КИМов для подготовки к ЕГЭ, затем решение задач комментируется студентами у доски.

Примерные задания

1. Доказать, что интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{10+x}$ больше $\frac{1}{6}$ и меньше $\frac{1}{5}$.

Доказать неравенства:

2. $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$ 3. $\frac{2}{5} < \int_1^2 \frac{xdx}{x^2+1} < \frac{1}{2}$

Исходя из геометрического смысла интеграла вычислите:

4. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ 5. $\int_{-3}^{3} \left||x|-2\right| dx$ 6. $\int_1^{2,53} [x]dx$

7. $\int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\sqrt{1-x^2}-x\right)dx$ 8. $\int_{-1}^{0,25} \left(\{x\}+\frac{1}{2}\right)dx$

При каких значениях пределов интегрирования существуют интегралы:

9. $\int_a^b \frac{dx}{x}$ 10. $\int_0^a \frac{dx}{x^2-4}$

Найти средние значения функций на указанных отрезках

11. $f(x)=x^2,\quad [-2;2]$ 12. $f(x)=3x^2+2x-1,\quad [1;5]$

13. $f(x)=3^x-2x+3,\quad [0;2]$

Практическое занятие № 2. «Тема 8 «Определенный интеграл (Формула Ньютона-Лейбница. Основные методы интегрирования)»

Примерные задания

Вычислить:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2\frac{x}{2}dx$ **2.** $\int_{-\pi/4}^{0} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}dx$ **3.** $\int_2^3 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}dx$

4. $\int_1^2 x\ln x dx$ **5.** $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ **6.** $\int_0^{\pi/2} \sin x\cdot\cos^2 xdx$ **7.** $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}$

8. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ **9.** $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1}$ **10.** $\int_{-1}^{1} |x|dx$ **11.** $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} |\sin x|dx$

12. $\int_0^2 \sqrt{\left(3x^2-\frac{2}{3}\right)^2}dx$ **13.** $\int_{-1/2}^{2} |x-1|x^2dx$ **14.** $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos^4\left(x-\frac{\pi}{12}\right)dx$

15. $\int\limits_0^{10} \sqrt{2^x}\,dx$ **16.** $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{x^2+6x+9}\,dx$ **17.** $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$

18. $\int\limits_0^{4} x^3\sqrt{x^2+9}\,dx$ **19.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$

Практическое занятие №3. «Тема 9 «Приложения определенного интеграла»

Примерные задания

Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

1. $y=e^x,\quad y=e^{-x},\quad x=2$ 2. $y=x^2,\quad y=\frac{x^2}{2},\quad y=2x$

3. Вычислить площадь, заключенную между параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке М(3;5) и осью ординат.

4. Найти площадь, заключенную между линиями $r=2-\cos\varphi$ и $r=\cos\varphi$.

5. Найти длину астроиды: $x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t$.

6. Найти длину кардиоиды: $r=a(1+\cos\varphi)$.

7. Вычислить объем кругового конуса с радиусом основания R и высотой H.

8. Найдите объем фигуры, отсеченной от кругового цилиндра с радиусом основания 3 ед. и высотой 10 ед. плоскостью, проходящей через центр основания под углом 45^0 к плоскости основания.

9. Осями круговых цилиндров радиуса R являются координатные оси Ox и Oy. Вычислите объем фигуры, заключенной внутри этих цилиндров.

10. Основанием палатки служит квадрат со стороной a м. На диагоналях квадрата как на диаметрах построен обтянутый полотном каркас из полуокружностей, плоскости которых перпендикулярны основанию. Вычислите объем палатки.

Практическое занятие № 4 «Тема 9. Приложения определенного интеграла»

Занятие проходит в интерактивной форме. Студенты в малых подгруппах или в парах работают с действующими школьными учебниками алгебры и начал анализа, геометрии (объемы тел вращения) 11 классов, с методическими пособиями для учителя, выявляя, решая и группируя задачи на приложения определенного интеграла. В конце занятия подводится итог.

Практическое занятие № 5 «Тема 9. Приложения определенного интеграла»

Занятие проходит в интерактивной форме. Студенты в парах работают над выполнением заданий карточки. Преподаватель корректирует работу студентов.

Карточка

Вычислите площади фигур, ограниченных графиками функций:

1. $y=(x-2)^3,\ y=4x-8$;
2. $r=4\cos\varphi,\ r=2\ (r\ge 2)$.

Вычислите длины дуг кривых:

3. $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$;
4. $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases};\quad 0\le t\le\pi$;
5. $r=3e^{3\varphi/4},\quad -\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.

Практическое занятие № 6 «Тема 11. Дифференциальные уравнения первого порядка (Поле направлений. Уравнения с разделяющимися переменными»

Примерные задания

1. Построить изоклины уравнения $dy+\left(2x^2-y\right)dx=0$ и показать приближенно вид интегральных кривых.

2. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y-x^2y\right)dy=0$ - решить уравнение.

3. $x\dfrac{dy}{dx}+y=y^2$ - решить уравнение.

4. Найти решение уравнения $\left(1+y^2\right)dx-xydy=0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=2$, $y_0=1$.

5. Найти решение уравнения $y'\sin x=y\ln y$, удовлетворяющее условиям: $x_0=\dfrac{\pi}{2}$, $y_0=1$.

6. В резервуаре находится 100 *л* рассола, содержащего 10 *кг* растворенной соли. Вода вливается в резервуар со скоростью 3 *л* в *мин.* Смесь вытекает из него со скоростью 2 *л* в *мин.* Концентрация раствора поддерживается равномерной посредством перемешивания. Сколько соли будет содержать резервуар по истечении часа?

Практическое занятие № 7 «Тема 11. Дифференциальные уравнения первого порядка (Поле направлений. Уравнения с разделяющимися переменными»

Занятие проводится в интерактивной форме: студенты работают в парах, решая задания на карточках. Если в конце занятия студенты не успели показать решения преподавателю, решения должны быть показаны во время консультации.

Карточка

1. Построить изоклины уравнения $\dfrac{dy}{dx}=2y+8x$ и показать приближенно вид интегральных кривых.

2. $xy\left(1+x^2\right)y'=1+y^2$ - решить уравнение.

3. $\left(\sqrt{xy}-\sqrt{x}\right)dy+ydx=0$ - решить уравнение.

4. $yy'+x=1$ - решить уравнение.

5. Сосуд объемом 40 л содержит 80% азота и 20% кислорода. В сосуд каждую секунду втекает 0,2 л азота и вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

Практическое занятие № 8 «Тема 11. Дифференциальные уравнения первого порядка (Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли)»

Примерные задания

Решить линейные дифференциальные уравнения:

1. $y'-y=e^x$ **2.** $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{4xy}{x^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}$

3. $y'+\dfrac{y}{1+x}+x^2=0$ **4.** $dx+\left(x+y^2\right)dy=0$

5. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$

Решить уравнения Бернулли:

6. $y'+y=xy^3$ **7.** $y'+y=x\sqrt{y}$

8. $\left(1+x^2\right)\dfrac{dy}{dx}=xy+x^2y^2$ **9.** $x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^5y^2$

10. $\int xydx = x^2 + y$. Найти *y=y(x).*

11. Найти кривую, у которой площадь криволинейной трапеции с основанием $[a; x]$ равна $\frac{1}{m}$ -ной части площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной крайней ординате.

Практическое занятие № 9 «Тема 11. Дифференциальные уравнения первого порядка (Однородные дифференциальные уравнения)»

Занятие проводится в интерактивной форме: студенты разбиваются на малые группы и решают задачи по карточкам. В конце занятия преподаватель опрашивает студентов подгруппы по решениям, любой студент подгруппы должен уметь достаточно полно объяснять свои решения.

Карточка

1. $\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx - \frac{2ydy}{x} = 0$; **2.** $xy'\cos y + \sin y = 0$

3. $\left(3x^2y - 2x^3 + y^3\right)dx - \left(2y^3 - 3xy^2 - x^3\right)dy = 0$

4. $\left(x^2 + y^2\right)dx = 2xydy$ **5.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

6. $\left(y^2 - 3x^2\right)dy + 2xydx = 0$ **7.** $(x-2)dx + (y-2x+1)dy = 0$

Практическое занятие № 10 «Тема 11. Дифференциальные уравнения первого порядка (Решение задач)»

Примерные задания

1. Найти закон движения свободно падающего в пустоте тела, если начальная скорость падения тела равна 0.

2. Скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности температур тела и воздуха. Температура тела равна 20^o. Известно, что в течение 20 минут тело остыло со 100^o до 60^o. Определите закон изменения температуры тела с течением времени.

3. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 20 км/ч. На полном ходу ее мотор выключают и через 40 секунд после этого скорость лодки уменьшается до 8 км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определите скорость движения лодки через 2 минуты после остановки мотора.

4. Изолированному проводнику сообщили заряд 1000 Кл. Вследствие несовершенства изоляции проводник постепенно теряет свой заряд. Скорость потери заряда в данный момент пропорциональна наличному заряду проводника. Какой заряд останется на проводнике по истечении 10 мин, если за первую минуту потеряно 100 Кл.

5. Составьте закон движения парашютиста, масса тела которого равна *m*.

6. Определите форму зеркала, обладающего тем свойством, чтобы все лучи, исходящие из источника света, помещенного в точке О на оси вращения, отражались бы зеркалом параллельно этой оси.

Практическое занятие № 11 «Тема 11. Дифференциальные уравнения первого порядка (Решение задач)»

Примерные задания

1. Записать уравнения кривых, для которых площадь любого треугольника, образованного касательной и ординатой, проведенными из некоторой точки кривой, и осью абсцисс, равна единице. Начертить все непрерывные кривые, удовлетворяющие условию задачи и проходящие через точку (1; 2).
2. Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат. Начертить все непрерывные кривые, удовлетворяющие условию задачи и проходящие через точку (–1; 1).
3. Записать уравнения кривых, для которых точка пересечения любой касательной с осью абсцисс имеет абсциссу, отличающуюся в два раза от абсциссы точки касания. Начертить все непрерывные кривые, удовлетворяющие условию задачи и проходящие через точку (–1; 1).
4. Записать уравнения кривых, образующих в каждой своей точке угол 45° с некоторой параболой из семейства $y = ax^2$.
5. Записать уравнения кривых, обладающих следующим свойством: если через любую точку данной кривой провести прямые, параллельные осям координат, до пересечения с этими осями, то площадь полученного прямоугольника делится кривой в отношении 1:3. Начертить все непрерывные кривые, удовлетворяющие условию задачи и проходящие через точку (1; –1).

II курс
4 СЕМЕСТР

Практическое занятие № 1. «Тема 12. Некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков (Уравнения, допускающие понижение порядка)»

Примерные задания

Решить уравнения:

1. $y''' = x$ 2. $y''' = y''^2$ 3. $y'' = ae^y$

4. $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$ 5. $x^2yy'' = (y - xy')^2$

6. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, $x_0 = 1,$ $y_0 = 1,$ $y'_0 = -1.$

Практическое занятие № 2. «Тема 12. Некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков (Уравнения, допускающие понижение порядка)»

Занятие проводится в интерактивной форме: студенты разбиваются на малые группы и решают задачи по карточкам. В конце занятия преподаватель опрашивает студентов подгруппы по решениям, любой студент подгруппы должен уметь достаточно полно объяснять свои решения.

Карточка

1. $2y'^2 = (y-1)y''$
2. $xy'' + y' = 0$
3. $2xy'y'' = y'^2 + 1$
4. $xy''' - y'' = 0$
5. $y'' = 3x^2,$ $x_0 = 0,$ $y_0 = 2,$ $y'_0 = 1$

Практическое занятие № 3. «Тема 12. Некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков (Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами)»

Примерные задания

Решить однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - y = 0$ **2.** $y'' - 4y' + 4y = 0$ **3.** $y'' + y = 0$

4. $y''' - 8y = 0$ **5.** $y^{IV} - 16y = 0$

Определить вид общего решения для уравнений:

6. $y'' + a^2 y = e^x$ **7.** $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(x^2 + x)$

8. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \sin x + x^2$ **9.** $y'' + 2y' + y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$

10. $y'' + 2y' + 2y = e^{-x}\cos x + xe^{-x}$

11. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$ **12.** $y'' - 2y' + y = e^{-x} + e^x + \sin x$

13. $y'' - a^2 y = e^{bx}$ $(b \neq a$ и $b = a)$

14. $y'' + a^2 y = \sin bx$ $(b \neq a$ и $b = a)$

17. $y^{IV} + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = \cos x + 40e^x$

Практическое занятие № 4. «Тема 12. Некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков (Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами)»

Примерные задания

Решить неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами:

1. $y'' - 5y' + 6y = x$ **5.** $y'' + 2y = x^2 + 2$

2. $y'' + 4y' + 4y = 3e^{3x}$ **6.** $y''' - 7y'' + 6y = x^2$

3. $y'' + 4y = 8\sin 2x$ **7.** $2y'' + 5y' = \cos^2 x$

4. $y'' + y = e^{-x} + 2$

Практическое занятие № 5 «Тема 13. Числовые ряды (Основные понятия)»

Занятие проводится в интерактивной форме: студенты отрабатывают основные понятия и разбирают теоремы в парах, затем отвечают на вопросы у доски.

Примерные задания

1. Показать, что ряд $\sum \frac{\sqrt{n}}{n}$ удовлетворяет необходимому признаку сходимости, но является расходящимся.

2. Доказать расходимость ряда $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

3. Найти выражения для S_n, S, R_n, если: а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

4. Найти S, u_n, если $S_n = 1 + \frac{1}{2n-1}$.

5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

6. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n^2+3n+3)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

7. Найти сумму или установить расходимость ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg \frac{1}{2n^2}$.

Практическое занятие № 6 «Тема 13. Числовые ряды (Достаточные признаки сходимости положительных рядов)»

Примерные задания

1. С помощью признаков сравнения исследовать ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2)^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n - n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^3}.$$

2. С помощью признака Даламбера исследовать ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n!}.$$

3. С помощью признака Коши исследовать ряды:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}.$$

4. С помощью интегрального признака Коши исследовать ряды:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

Практическое занятие № 7 «Тема 13. Числовые ряды (Достаточные признаки сходимости положительных рядов)»

Часть занятия (1 ч) проводится в интерактивной форме

Примерные задания

1. Исследовать на сходимость ряды:

1) $\sum \frac{1}{n \cdot ln^2 n}$ 2) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 3) $\sum \left(\frac{1+n}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$

4) $\sum \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-2)}{2 \cdot 7 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot (5n-3)}$ 5) $\sum arctg^n \frac{1}{n}$ 6) $\sum \sqrt{n} \left(\frac{n}{6n+1}\right)^{3n}$

7) $\sum \frac{20n^3}{(n+1)(3n^2-1)}$ 8) $\sum \frac{n^n}{ln^n(n+1)}$ 9) $\sum \sqrt[n]{0{,}01}$

2. (З*адание выполняется в малых группах)*

Сконструируйте карту основных понятий и теорем по теме «Числовые ряды»

Практическое занятие № 8 «Тема 13. Числовые ряды (Знакопеременные ряды)»

Примерные задания

1. Исследовать сходимость рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{10}}{n^{22}+3}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)^n};$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\sin\frac{\sqrt{n}}{n+1};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)^n;\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 7^n}.$$

2. Сколько нужно взять членов, чтобы получить значение суммы с точностью до 0,001: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

3. С какой точностью будет вычислена сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}$, если для ее подсчета будут взяты первые 7 членов ряда?

Практическое занятие № 9 «Тема 13. Числовые ряды»

Занятие проводится в интерактивной форме: студенты в парах выполняют задания по карточке

Карточка

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{3n+5}\cdot\frac{1}{2^n}$ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{4^n}$ 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$ 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\cos^2 6n}$

Вычислить сумму ряда с точностью α:

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)^3}$, $\alpha=0{,}001$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}$, $\alpha=0{,}001$

9. Доказать справедливость равенства: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)!}{n^n}=0$.

Практическое занятие № 10 «Тема 14. Функциональные ряды»

Примерные задания

1. Найти область сходимости функциональных рядов:

$$\sum(nx)^n;\quad \sum\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^n};\quad \sum\frac{1}{n(x-2)^n}.$$

2. Вычислить суммы функциональных рядов и указать область их определения:

$$\sum\frac{1}{\ln^n(2x-1)};\qquad \sum\frac{1}{x^{nctgx}}.$$

3. Исходя из определения равномерной сходимости доказать равномерную сходимость рядов:

$$\sum x^n,\ \left[-\frac{1}{2},0\right];\qquad \sum\frac{(-1)^n x^n}{n+2},\quad [0;1].$$

4. Докажите равномерную сходимость функциональных рядов:

$$\sum \frac{e^{\cos nx}}{n \ln^2 n}, \quad x \in R; \quad \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{x^2 + n^3}}, \quad x \in R \cdot$$

5. Построить график функции: $f(x) = x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{\left(1+x^4\right)^2} + \ldots$.

Практическое занятие № 11 «Тема 14. Степенные ряды»

Примерные задания

Найти области сходимости степенных рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-4)^n}{n^n}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; 3. $\sum \frac{\ln(n+1)}{n} x^{n+1}$;

4. $\sum (-1)^n \frac{(x-4)^{2n}}{n \cdot 4^n}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$; 6. $\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot x^n$

7. Построить график функции $f(x) = x + \frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)^2} + \ldots$

8. Найти интервал сходимости и сумму ряда:

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots$$

Практическое занятие № 12 «Тема 14. Степенные ряды»

Занятие проходит в интерактивной форме: студенты работают в парах по карточкам, затем осуществляется взаимопроверка решений между малыми группами.

Карточка

1. Найдите радиус и интервал сходимости степенного ряда:

$$\sum \frac{(x-1)^n}{n!}, \quad \sum \frac{(x+2)^n}{2^n n}, \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^3} (x+5)^{2n} \cdot$$

2. Найти область сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (x-3)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-2}}{2^{3n-2}(n+1)\ln(n+1)}$.

3. Решить уравнение: $(x+1) + (x+1)^2 + \ldots = \frac{1}{3}$.

Практическое занятие № 13 «Тема 14. Степенные ряды (Разложение функций в степенные ряды)»

Примерные задания

1. Разложить функцию $y = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора: а) по определению, б) используя разложение $\sin x$.

2. Разложить по степеням (x+3) функцию $y = \frac{1}{1-x}$.

3. Разложить по степеням *x* функцию $y = e^{-x^4}$.

4. Разложить по степеням *x* функцию $y = \frac{2}{1-3x^2}$.

5. Разложить функцию $y = \sqrt{x}$ по степеням $(x-2)$.

6. Разложить по степеням (x-4) функцию $y = \dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$.

7. Не производя разложения функций в ряд Тейлора по степеням $(x-x_0)$, указать интервалы сходимости этих рядов к функциям:

а) $\ln(1+8x^3)$, $x_0 = 0$; б) $\dfrac{1}{x-3}$, $x_0 = -5$; в) $e^{\frac{1}{16+x^4}}$, $x_0 = 0$.

8. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

9. Разложить в ряд по степеням x функцию $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

Практическое занятие № 14 «Тема 14. Степенные ряды (Разложение функций в степенные ряды)»

Примерные задания

1. Разложить функцию $y = \ln\dfrac{1+x}{1-x^2}$ в ряд по степеням x.

2. Разложить функцию $y = \ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$ в ряд по степеням x.

3. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x - \sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{1-\cos x}$.

4. Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, найти значение производной указанного порядка: $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, $f^{(6)}(0) = ?$

5. Разложить функцию $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ в ряд по степеням x.

6. Применяя различные приемы, найти суммы рядов:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+2}}{n}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(2n-1)!!}{n!2^n}x^n$; г) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{arctg^n x}{n!}$.

Практическое занятие № 15 «Тема 14. Степенные ряды (Приближенные вычисления с помощью рядов)»

Примерные задания

1. Вычислить приближенно с заданной точностью:

а) $\cos 1^0$, $\alpha = 0{,}0001$; б) $\sqrt[3]{68}$, $\alpha = 0{,}001$; в) $\ln 2$, $\alpha = 0{,}0001$

г) $\int\limits_0^{1,5}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$, $\alpha = 0{,}001$.

2. Вычислить приближенно $\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

3. Вычислить приближенно $\sin 1$ с точностью $\alpha = 0{,}00001$.

4. Проинтегрировать уравнения методом степенных рядов, указав в ответе несколько первых членов разложения:

1) $y'' + xy = 0, \quad x_0 = 0, y_0 = 1, y_0' = 0$

2) $y' = x^2 - y^2, \quad x_0 = 0, y_0 = 0.$

Практическое занятие № 16 «Итоговое занятие по разделу «Ряды»

Занятие проходит в интерактивной форме: студенты в парах выполняют задание по карточкам и отчитываются о выполнении на консультации

Примерные задания

1. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha = 0{,}01$: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$.

2. Найти область сходимости функционального ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{ln^n x}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}\left(x^2 - 4x + 6\right)^n$.

3. С помощью теоремы Вейерштрасса доказать равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin nx}{n^3+3}$ при всех $x \in R$.

4. Разложить функции в ряд Тейлора по степеням *x*: а) $\frac{9}{20 - x - x^2}$, б) $\ln(2+4x)$.

5. Вычислить интеграл $\int_0^{0,1} e^{-6x^2}\,dx$ с точностью до 0,001.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{1-\cos x}$.

7. Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, найти значение производной указанного порядка: $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, $f^{(6)}(0) = ?$

8. Вычислить приближенно $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ с точностью $\alpha = 0{,}001$.

6. ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
ПК-2	Коллоквиум	Низкий (неудовлетворительно)	Студент отвечает неправильно, нечетко и неубедительно, дает неверные формулировки, в ответе отсутствует какое-либо представление о вопросе
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент отвечает неконкретно, слабо аргументировано и не убедительно, хотя и имеется какое-то представление о вопросе

		Базовый (хорошо)	Студент отвечает в целом правильно, но недостаточно полно, четко и убедительно
		Высокий (отлично)	Ставится, если продемонстрированы знание вопроса и самостоятельность мышления, ответ соответствует требованиям правильности, полноты и аргументированности.
ПК-2	Индивидуальная работа	Низкий (неудовлетворительно)	Индивидуальная работа студенту не засчитывается если студент: • допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой пересекается пороговый показатель; • или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый (удовлетворительно)	Если студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил: • не более двух грубых ошибок; • или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета; • или не более двух-трех негрубых ошибок; • или одной негрубой ошибки и трех недочетов; • или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
		Базовый (хорошо)	Если студент выполнил работу полностью, но допустил в ней: • не более одной негрубой ошибки и одного недочета; • или не более двух недочетов.
		Высокий (отлично)	Если студент: • выполнил работу без ошибок и недочетов; • допустил не более одного недочета.
ПК-2	Контрольная работа	Низкий – до 60 баллов (неудовлетворительно)	Контрольная работа не засчитывается если студент: • допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой пересекается пороговый показатель;

			• или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый – 61-75 баллов (удовлетворительно)	Если студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил: • не более двух грубых ошибок; • или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета; • или не более двух-трех негрубых ошибок; • или одной негрубой ошибки и трех недочетов; • или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
		Базовый – 76-84 баллов (хорошо)	Если студент выполнил работу полностью, но допустил в ней: • не более одной негрубой ошибки и одного недочета; • . или не более двух недочетов.
		Высокий – 85-100 баллов (отлично)	Если студент: • выполнил работу без ошибок и недочетов; • допустил не более одного недочета.

6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт/экзамен.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

Критерии оценивания устного ответа на практическом занятии, семинаре

Развернутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять определения, правила в конкретных случаях.

Критерии оценивания:

1) полнота и правильность ответа;

2) степень осознанности, понимания изученного;

3) языковое оформление ответа.

Оценка «отлично» ставится, если:

1) студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;

2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные;

3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

«хорошо» – студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «5», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

«удовлетворительно» – студент обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;

2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;

3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает незнание большей части соответствующего вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «2» отмечает такие недостатки в подготовке, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Критерии оценивания самостоятельных письменных и контрольных работ

Оценка «отлично» ставится, если студент:

1. выполнил работу без ошибок и недочетов;
2. допустил не более одного недочета.

Оценка «хорошо» ставится, если студент выполнил работу полностью, но допустил в ней:

1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета;
2. или не более двух недочетов.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил:

1. не более двух грубых ошибок;
2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета;
3. или не более двух-трех негрубых ошибок;
4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов;
5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент:

1. допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3»;
2. или если правильно выполнил менее половины работы.

Критерии оценивания устного ответа на зачете

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если:

- вопросы раскрыты, изложены логично, без существенных ошибок;
- показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами;
- продемонстрировано усвоение ранее изученных вопросов, сформированность компетенций, устойчивость используемых умений и навыков.
- Допускаются незначительные ошибки.

Оценка «не зачтено» выставляется, если:

- не раскрыто основное содержание учебного материала;

- обнаружено незнание или непонимание большей, или наиболее важной части учебного материала;
- допущены ошибки в определении понятий, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов;
- не сформированы компетенции, умения и навыки.

Критерии оценивания устного ответа на зачете с оценкой

Оценка 5 «отлично» выставляется студенту, если:
а) студент регулярно выполнял все задания в течение семестра;
б) знает определения понятий, формулировки теорем с доказательствами;
в) верно применяет теоретические знания к решению задач;
г) выполнил 85-100% заданий на зачете.

Оценка 4 «хорошо» выставляется студенту, если:
а) студент регулярно выполнял все задания в течение семестра;
б) знает определения понятий, формулировки теорем, но испытывает некоторые затруднения в доказательствами;
в) при решении задач может испытывать незначительные затруднения;
г) на зачете выполнил 75-84% заданий.

Оценка 3 «удовлетворительно» выставляется, если:
а) студент выполнял большую часть заданий в течение семестра;
б) знает определение основных понятий и формулировки теорем;
в) при решении задач испытывает затруднения, но может их преодолеть, беседуя с преподавателем;
г) на зачете выполнил 65-74% заданий.

Оценка 2 «неудовлетворительно» выставляется студенту если:
а) студент не знает определений понятий и формулировки теорем;
б) испытывает значительные трудности при решении задач;
в) в течение семестра не выполнял задания преподавателя;
г) на зачете смог выполнить не более 64% заданий.

Критерии оценивания устного ответа на экзамене

Оценка 5 «отлично» выставляется студенту, если:
а) представлен полный обоснованный ответ на первый теоретический вопрос;
б) представлен полный обоснованный ответ на второй теоретический вопрос;
в) верна решена задача;

Оценка 4 «хорошо» выставляется студенту, если:
а) представлены верные обоснованные ответы по двум из трёх пунктов, а ответ по одному третьему пункту не полный;

Оценка 3 «удовлетворительно» выставляется, если представлен верный обоснованный ответ по одному из пунктов и имеются верные продвижения в решении задачи;

Оценка 2 «неудовлетворительно» выставляется студенту если не представлены верные ответы ни по одному из трёх пунктов билета.

Программа экзамена (1 семестр)

1. Действительные числа. Аксиома Архимеда. Свойство непрерывности действительных чисел. Теорема Кантора. Модуль числа (определение, геометрический смысл),свойства модуля. Целая и дробная часть числа: $[x]$, $\{x\}$.
2. Ограниченные множества. Грани множества и их свойства. Теорема о существовании верхней (нижней) грани.
3. Функции (основные понятия). Элементарные функции школьного курса и их графики. Операции над функциями. Композиция функций. Понятие обратной функции.
4. .Монотонные функции и их свойства. Ограниченные функции. Четные, нечетные функции. Периодические функции.

5. Предел функции в точке: определение на языке окрестностей, на языке "$\varepsilon - \delta$"; контропределение. Теорема о единственности предела.

6. Свойства функции, имеющей предел в точке: теорема о сохранении функцией знака предела, теорема об ограниченности функции. Предельный переход в неравенствах.

7. Бесконечно малые функции и их свойства.

8. Необходимое и достаточное условие существования предела функции в точке. Арифметические операции над пределами.

9. Первый замечательный предел. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные функции.

10. Бесконечно большие функции. Предел функции на бесконечности.

11. Односторонние пределы. Бесконечный предел.

12. Числовая последовательность: монотонность и ограниченность. Предел числовой последовательности. Теорема о пределе монотонной последовательности.

13. Неравенство Бернулли. Число e.

14. Непрерывные функции в точке и на множестве. Свойства функций, непрерывных в точке. Непрерывность суммы, произведения и частного двух непрерывных функций.

15. Точки разрыва и их классификация.

16. Предел и непрерывность сложной функции. Предельный переход под знаком непрерывной функции.

17. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

18. Теорема о существовании и непрерывности обратной функции.

19. Равномерная непрерывность.

Программа зачета (2 семестр)

1. Задачи, приводящие к понятию производной, определение производной, ее механический и геометрический смысл.
2. Дифференцируемость функции. Условия дифференцируемости функции.
3. Дифференциал функции.
4. Правила вычисления производных (производная суммы, произведения, частного).
5. Производные элементарных функций. Дифференцирование сложной функции.
6. Производная обратной функции. Вывод формул для $(\arcsin x)'$, $(\arccos x)'$, $(arctgx)'$.
7. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
8. Производная функции, заданной параметрически.
9. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
10. Правила Лопиталя.
11. Признаки постоянства и монотонности функции.
12. Экстремумы. Необходимое условие. Достаточные условия экстремума.
13. Выпуклость, вогнутость функции, достаточные условия.
14. Точки перегиба, необходимые и достаточные условия.
15. Асимптоты функции.
16. Первообразная функции, неопределенный интеграл и его свойства.
17. Интегрирование заменой переменной.
18. Интегрирование по частям.
19. Интегрирование рациональных функций.
20. Интегрирование тригонометрических функций.
21. Интегрирование некоторых иррациональностей.

Программа зачета с оценкой (3 семестр)

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла, определенный интеграл.
2. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства.
3. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции.
4. Классы и свойства интегрируемых функций.
5. Свойства определенного интеграла. Теорема о среднем.
6. Интеграл с переменным верхним пределом.
7. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Вычисление площади плоской фигуры.
9. Вычисление длины дуги.
10. Вычисление объемов тел.
11. Несобственный интеграл первого рода.
12. Несобственный интеграл второго рода.
13. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
14. Основные понятия: виды дифференциальных уравнений, порядок дифференциального уравнения, виды решений дифференциального уравнения, их геометрическая иллюстрация.
15. Теорема существования и единственности решения задачи Коши.
16. Поле направлений.
17. Особое решение. Огибающая семейства интегральных кривых.
18. Уравнения с разделяющимися переменными.
19. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах.
20. Однородные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения, сводящиеся к однородным.
21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Метод Бернулли и метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).
22. Уравнения Бернулли.

Программа зачета с оценкой (4 семестр)

1. Дифференциальные уравнения высшего порядка. Основные понятия. Теорема Пикара и её геометрический смысл.
2. Уравнения, допускающие понижение порядка: а) уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$; б) уравнения, не содержащие явно искомой функции; в) уравнения, однородные относительно неизвестной функции и её производных; г) уравнения, не содержащие независимую переменную.
3. Линейные дифференциальные уравнения n-ного порядка.
4. Линейные однородные дифференциальные уравнения n-ного порядка. Теорема о структуре общего решения.
5. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высшего порядка. Теорема о структуре общего решения. Правило нахождения общего решения.
6. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
7. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Отыскание частного решения по виду правой части.
8. Числовой ряд и его частичные суммы. Сходящиеся ряды. Сложение рядов и умножение ряда на число. Остаток сходящегося ряда.

9. Необходимое условие сходимости. Гармонический ряд. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с положительными членами.
10. Числовые ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости положительных рядов: признаки сравнение рядов; признаки Даламбера и Коши.
11. Интегральный признак сходимости.
12. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.
13. Оценка остатка знакочередующегося ряда при замене его частичной суммой.
14. Абсолютная и условная сходимость. Перестановка членов в рядах.
15. Функциональный ряд. Область сходимости. Признаки равномерной и абсолютной сходимости.
16. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.
17. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.
18. Равномерная сходимость степенного ряда. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
19. Ряд Тейлора.
20. Разложение элементарных функций в степенной ряд.

6.3 Оценочные средства для проверки уровня сформированности компетенций ПК-2

Оценочные средства для проверки уровня сформированности компетенции ПК-2:

Тест содержит следующие типы заданий

Тип задания	№ задания	Вес задания (балл)	Результат оценивания (баллы, полученные за выполнение задания / характеристика правильности ответа)
задания закрытого типа с выбором одного правильного (1 из 4)	1, 2, 3, 5	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором одного правильного ответа по схеме: «верно»/ «неверно»	4	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором нескольких правильных ответов (3 из 6)	6, 7	2 балла	2 б – полное правильное соответствие (последовательность вариантов ответа может быть любой); 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задания закрытого типа на установление соответствия (4 на 4)	8, 9	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задание закрытого типа на установление последовательности	10	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи

задания открытого типа с кратким ответом	11, 12, 13,	3 балла	3 б – полное правильное соответствие; 0 б – остальные случаи.
задания открытого типа с развернутым ответом	14, 15	5 баллов	5 б – полное правильное соответствие; если допущена одна ошибка/неточность / ответ правильный, но не полный - 3 балла; если допущено более одной ошибки / ответ неправильный / ответ отсутствует – 0 баллов

Формируемая компетенция	Индикаторы сформированности компетенции
ПК-2. Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования	ПК-2.2 Владеет основными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов. ПК-2.5 Применяет математический язык как универсальное средство построения модели явлений, процессов, для решения практических и экспериментальных задач, эмпирической проверки научных теорий.

Задание 1

Область определения функции $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x+3}$ имеет вид …

1) $x\epsilon(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$
2) $x\epsilon(-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$
3) $x\epsilon(-\infty; -4] \cup [1; 3) \cup (3; +\infty)$
4) $x\epsilon(-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$

Ответ: 1

Задание 2

Предел $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-x-12}{x-4}$ равен …

1) 7
2) 3
3) 0
4) 1

Ответ: 1

Задание 3

Среднее значение функции $f(x) = \sqrt{x-1}$ на отрезке $[1; 5]$ равно …

1) $\frac{2}{3}$
2) 2
3) $\frac{4}{3}$
4) $\frac{16}{3}$

Ответ: 3

Задание 4

Верно ли, что производная функции $y = \frac{2x}{x^2+1}$ равна $\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$?

1) Верно
2) Неверно

Ответ: 1

Задание 5

Множество первообразных функции $f(x) = \frac{x^3-2x^2+3x-4}{x^2}$ имеет вид …

1) $\frac{x^2}{2} - 2x + 3ln|x| + \frac{4}{x} + C$
2) $\frac{x^2}{2} - 2x + 3ln|x| - \frac{8}{x} + C$
3) $\frac{x^2}{2} + 2x + 3ln|x| - \frac{4}{x} + C$
4) $x - 2 - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x} + C$

Ответ: 1

Задание 6

Какие три из следующих уравнений задают асимптоты (вертикальные, наклонные, горизонтальные) графика функции $f(x) = \frac{2x^2-x}{x^2+3x}$?

1) $y = 2$
2) $x = 0$
3) $x = 3$
4) $y = -7x + 2$
5) $y = 2x - 1$
6) $x = -3$

Ответ: 1, 2, 6

Задание 7

Среди предложенных дифференциальных уравнений укажите уравнения с разделяющимися переменными:

1) $y' = x^2 \cdot \sin y$;
2) $y' = 3x^2 y + 2x$;
3) $y' = \frac{\ln x}{y}$;
4) $y' = \frac{5x - y}{y}$;
5) $y'' + 2y' + y = e^x$;
6) $(4y+1)dy = (3x-2)dx$.

Ответ: 136.

Задание 8

Установите соответствие между функциями и их разложениями в ряд Маклорена
Функции

1) $f(x) = sin2x$

2) $f(x) = cos3x$
3) $f(x) = x \cdot e^{2x}$
4) $f(x) = \sqrt{1+x}$

Разложение функции в ряд Маклорена

А) $f(x) = 2x - \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} - \frac{128x^7}{7!} + \cdots,\ x\epsilon R$

Б) $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\cdot 2!}x^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}x^3 - \cdots,\ x\epsilon(-1;1)$

В) $f(x) = 1 - \frac{9}{2!}x^2 + \frac{81}{4!}x^4 - \frac{729}{6!}x^6 + \cdots,\ x\epsilon R$

Г) $f(x) = x + 2x^2 + \frac{4x^3}{2!} + \frac{8x^4}{3!} + \cdots,\ x\epsilon R$

Ответ:

1	2	3	4
А	В	Г	Б

Задание 9

Установите соответствие между однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами и их общими решениями

Дифференциальные уравнения:

1) $y'' - y' - 2y = 0$
2) $y'' + 6y' + 9y = 0$
3) $y'' + 9y = 0$
4) $y'' + 5y' = 0$

Решения дифференциальных уравнений:

А) $y = e^{-3x}(C_1 + C_2x)$

Б) $y = C_1 + C_2e^{2x}$

В) $y = C_1cos3x + C_2sin3x$

Г) $y = C_1e^x + C_2e^{-5x}$

Ответ:

1	2	3	4
Г	А	В	Б

Задание 10

Алгоритм решения задачи на нахождение точек экстремума функции $y = f(x)$ представлен в виде перечня шагов. Внимательно изучите перечень и установите логическую последовательность этих шагов, расположив их в правильном порядке, без запятых.

Перечень шагов:

1. Найти точки функции, подозрительные на экстремум, решив уравнение $f'(x) = 0$.
2. Найти точки, в которых производная $f'(x)$ не существует.
3. Найти область определения функции $y = f(x)$.
4. Найти производную функции $f'(x)$.
5. Отметить на числовой прямой найденные точки, которые принадлежат области определения функции.
6. Исследовать знак первой производной $f'(x)$ на интервалах, на которые точки, подозрительные на экстремум, и критические точки делят область определения.

7. Сделать вывод о наличии экстремумов в каждой критической точке: если производная меняет знак с «+» на «-», то это точка максимума; если с «-» на «+» - точка минимума; если знак не меняется – экстремума нет.
8. Вычислить значения функции $f(x)$ в найденных точках экстремума.

Ответ: 34125678.

Задание 11

Найдите точку минимума функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 3$.

Ответ: 5

Задание 12

Вычислите: $\int_1^2 xlnxdx - ln4$.

Ответ: -0,75 или -0.75 или – 0,75 или - 0.75

Задание 13

Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = (x-3)^2$ и координатными осями.

Ответ: 9

Задание 14
Решите дифференциальное уравнение:

$$(1 + y^2)dx - xydy = 0$$

Решение
Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$(1 + y^2)dx = xydy$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{1 + y^2}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{ydy}{1 + y^2}$$

$$lnx = \frac{1}{2}ln(1 + y^2) + lnC$$

$$x = C\sqrt{1 + y^2}$$

Задание 15

Выведите формулу для вычисления объема шара радиуса R.

Решение
Шар можно получить вращением половины круга с центром в начале координат и радиусом R. Уравнение верхней полуокружности имеет вид: $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Формула для вычисления объёма тела вращения: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. Тогда с учетом симметричности шара получим:

$$V = 2\pi \int_0^R f^2(x)dx = 2\pi \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R,$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

Контрольные работы

1 семестр

Контрольная работа по Разделу I «Введение в анализ» (Тема 2 «Функции»)

Вариант 0

1. Найдите область определения функций:

а) $f(x) = \dfrac{tg3x}{x-2}$, б) $f(x) = \log_2(x^2 + 8x + 16) - \sqrt[3]{x-1}$.

2. Исследуйте функцию на возрастание и убывание; найдите множество значений функции: $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 4x + 5}$.

3. Представьте функцию в виде суммы четной и нечетной функций:

$f(x) = 2x^3 + \sin x^2 - x + 3$.

4. Постройте графики функций:

а) $f(x) = 2^{|x|}$, б) $f(x) = \dfrac{1}{|x| - 2}$, в) $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \le x \le 1 \\ 5x - 3, & 1 < x < 2 \end{cases}$.

2 семестр

Контрольная работа по разделу II «Дифференциальное исчисление функции одной переменной» (Тема 5 «Производная и дифференциал», Тема 6 «Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения»)

Вариант 0

1. Применяя формулы и правила дифференцирования, найдите производные:

а) $y = \cos\sqrt{3} + \sin^2\left(x^5 + 3x^4\right)$; б) $y = (tgx)^{\sqrt[3]{x}}$, в) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 + 1}{e^{2x+1}}}$.

2. Найдите y'_x и y''_{xx} от функции, заданной параметрически: $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$.

3. Пользуясь правилом Лопиталя, найдите: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x + \sin x}{x + \sin x}$.

4. Найдите промежутки монотонности, точки экстремума: $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$.

5. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Контрольная работа по разделу III «Интегральное исчисление функции одной переменной» (Тема 7 «Неопределенный интеграл»)

Вариант 0

Найдите:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{17-x^2}}$; 2. $\int \frac{dy}{y^2+2}$; 3. $\int \frac{dt}{t^2-5}$; 4. $\int x \ln \frac{x}{3} dx$;

5. $\int (\operatorname{arcctg} x)^7 \frac{dx}{1+x^2}$; 6. $\int \left(7\sqrt[5]{z} - \frac{2}{\sqrt[3]{z^4}} + \frac{8}{z} - e^{3z} + 5 \right) dz$;

7. $\int \frac{xdx}{5-x^2}$; 8. $\int \frac{5x-1}{x^2+5x+4} dx$.

Контрольная работа по разделу IV «Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений» (Тема 11 «Дифференциальные уравнения первого порядка»)

Вариант 0

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$
2. $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4\frac{y}{x} + 2$
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2, \quad y(1) = 0$
4. $y' + xy = (1+x)e^{-x} y^2, \quad y(0) = 1$
5. Построить интегральную кривую, проходящую через точку M(1;2): $y' = y - x^2$.

3 семестр

Контрольная работа по разделу IV «Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений» (Тема 12 «Некоторые типы дифференциальных уравнений высших порядков»)

Вариант 0

1. $y''' x \ln x = y''$.
2. $4y^3 y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$
3. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$
4. $y'' + 2y' = 4e^x (\cos x + \sin x)$

4 семестр

Контрольная работа по разделу V «Ряды» (Тема 13 «Числовые ряды»)

Вариант 0

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{4^n}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot 2^{2n+1}}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - \cos^2 6n}$

Коллоквиумы

1 семестр

Коллоквиум по разделу I «Введение в анализ» (Тема 4 «Непрерывность функции»)

Вопросы к коллоквиуму (определения и теоремы с доказательствами):

1. Определения непрерывной функции в точке и на множестве.
2. Точки разрыва и их классификация.
3. Первая теорема Больцано-Коши.
4. Вторая теорема Больцано-Коши.
5. Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности непрерывной функции)
6. Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении непрерывной функцией своих нижней и верхней граней)
7. Следствия из теорем.

Индивидуальные работы

1 семестр

Индивидуальное задание по разделу I «Введение в анализ»

Вариант 0

1. Решить уравнение и неравенство:

а) $|x+2|+|x-2|\ge 12$; б) $\left|\dfrac{x+7}{x-9}\right|=\dfrac{x+7}{x-9}$.

2. Найти область определения функций:

а) $y=\dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-x-2}}+\lg(x+1)$; б) $y=\arcsin\dfrac{5-2x}{3}$.

3. Построить график функции: $y=2|x|-1+x$.

4. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что функция $f(x)=2x^2-4$ непрерывна в точке $x_0=3$.

5. Найти промежутки монотонности функции: $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$.

6. Исследовать функцию на непрерывность, определить вид точек разрыва, построить график:

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\prec 1 \\ x, & 1\le x\le 2 \\ \dfrac{1}{x-2}, & x\succ 2 \end{cases}$$

7. Доказать (найти n_ε): $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+4}{2n+1}=\dfrac{7}{2}$.

8. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x^3-2x-1)(x+1)}{x^4+4x^2-5}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 10x}{e^{x^2}-1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{2n+3}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3-n)^2+(3+n)^2}{(3-n)^2-(3+n)^2}$.

3 семестр

Индивидуальное домашнее задание по разделу Ш «Интегральное исчисление функции одной переменной» (Тема 8 «Определенный интеграл»)

Вариант 0

Вычислить определенные интегралы:

1. $\int\limits_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1} dx$; 2. $\int\limits_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx$; 3. $\int\limits_{\pi/2}^{2arctg2} \frac{dx}{\sin^2 x(1-\cos x)}$.

Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций (предварительно схематично построить фигуры):

4. $y=(x-2)^3,\ y=4x-8$;
5. $r=4\cos\varphi,\ r=2\ (r\ge 2)$.

Вычислить длины дуг кривых:

6. $y=\ln x,\ \sqrt{3}\le x\le\sqrt{15}$;
7. $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases};\quad 0\le t\le\pi$;
8. $r=3e^{3\varphi/4},\quad -\pi/2\le\varphi\le\pi/2$.

Индивидуальное задание по разделу V «Ряды» (Тема 13 «Числовые ряды», Тема 14 «Функциональные ряды», Тема 15 «Степенные ряды»)

Вариант 0

1. Вычислить сумму ряда с точностью $\alpha=0{,}001$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n\cdot n!}$.

2. Найти область сходимости функционального ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 4^{-\frac{n^2}{x}}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

3. С помощью теоремы Вейерштрасса доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n9^n}$ при всех. $x\in[-1;3]$.

4. Разложить функции в ряд Тейлора по степеням x:

а) $\sqrt[4]{16-5x}$, б) $\left(2-e^x\right)^2$.

5. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,4}\cos\left(\frac{5x}{2}\right)^2 dx$ с точностью до 0,001.

6. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

7. Пользуясь разложением функции в ряд Маклорена, найти значение производной указанного порядка: $f(x)=\cos x\cdot chx,\quad f^{(7)}(0)=?$

8. Вычислить приближенно $\ln 3$ с точностью $\alpha=0{,}0001$.

7. ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Информационные технологии – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- Официальный сайт БГПУ;
- Корпоративная сеть и корпоративная электронная почта БГПУ;
- Система электронного обучения ФГБОУ ВО «БГПУ»;
- Система тестирования на основе единого портала «Интернет-тестирования в сфере образования www.i-exam.ru»;
- Система «Антиплагиат.ВУЗ»;
- Электронные библиотечные системы;
- Мультимедийное сопровождение лекций и практических занятий;
- Тренажеры, виртуальные среды.

8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

9.1 Литература

Основная литература

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа: учеб. Пособие для студентов вузов / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. _ СПб. ; М.; Краснодар: Лань, 2008. - 735 с. (7 экз.)
2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — URL : https://urait.ru/bcode/513351
3. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — URL : https://urait.ru/bcode/513352
4. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 3-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09085-7. — URL : https://urait.ru/bcode/511024

Дополнительная литература

5. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Решение типичных и трудных задач: учеб. пособие / Г. Н. Берман. - 3-е изд., стер. - СПб. : М.: Краснодар: Лань, 2007. - 604 с.

6. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: В 2 кн. : учеб. пособие для студ.ун-тов и пед. вузов / И. А. Виноградова; соавт. С. Н. Олехник, соавт. В. А. Садовничий. - 2-е изд., перераб. - М. : Высшая школа, 2002. - Кн.1 : Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной. - 2-е изд., перераб. - 724 с.

7. Виноградова, И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу: В 2 кн.: учеб. пособие для студ. ун-тов и пед. вузов / И. А. Виноградова; соавт. С. Н. Олехник, соавт. В. А. Садовничий. - 2-е изд., перераб. - М. : Высшая школа, 2002. - Кн.2: Ряды, несобственные интегралы, кратные и поверхностные интегралы. - 2-е изд., перераб. - 710 с.

8. Гусак, А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: справочное пособие к решению задач / А.А.Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2008. – 415 с.

9. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу/ Б.П.Демидович. – М. : Изд-во АСТ – Астрель. – 2006. – 558 с. (28экз.)

10. Задачник по курсу математического анализа / Под редакцией Н.Я.Виленкина. – М. : Просвещение, 1971, ч. 1, 350 с., ч. 2, 336 с.

11. Ивашев-Мусатов, О. Математический анализ? Это очень просто! / О. Ивашев-Мусатов. - М. : Чистые пруды, 2006. - 31 с.

12. Ильин, В.А. Математический анализ: в 2 ч. Ч.1: учебник / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов; МГУ им. М.В.Ломоносова. – М. : Проспект: Велби, 2006. – 660 с.

13. Ильин, В.А. Математический анализ: в 2 ч. Ч.2: учебник / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов; МГУ им. М.В.Ломоносова. – М. : Проспект: Велби, 2006. – 353 с.

14. Кудрявцев, Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д.Кудрявцев. – В 3-х т. Т.1. – М. : Дрофа. – 2008. – 702 с.

15. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа / Л.Д.Кудрявцев. – В 2-х т. Т.1. – М. : Физматлит. – 2003. – 399 с.

16. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа / Л.Д.Кудрявцев. – В 2-х т. Т.2. – М. : Физматлит. – 2003. – 424 с.

17. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление: лекции и практикум: учеб. пособие для студ. Вузов / И. М. Петрушко [и др.] ; ред. И. М. Петрушко. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2005. - 288 с.

18. Курс высшей математики. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление [Текст]: учеб. пособие для студ. вузов / И.М.Петрушко [и др.]; . - 2-е изд., стер. - СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2006. - 288 с.

19. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике: учебное пособие / А.Д.Мышкис. – СПб.; М.; Краснодар: Лань, 2007. – 688 с.

20. Насонова, Л.В. Избранные вопросы математического анализа. Предел и непрерывность. Часть 1,2: Методические рекомендации / Л.В.Насонова, И.В. Квасова, В.В.Попов. – Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2002.

21. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т.Письменный. – М. : Айрис-пресс. – 2006. – 602 с.

22. Самойленко, А.М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. – М.: Высшая школа. – 1989. – 383 с.

23. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Физматлит. - Т.3: Интегралы, ряды. – 2003. - 502 с.

24. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др. - 2-е изд., перераб.и доп. - М. : Физматлит. - Т.3: Функции нескольких переменных. – 2003. - 468 с.

25. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа / Г.М.Фихтенгольц. – М.: Лань. – Т. 1. - 2006. - 448 с.

26. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа / Г.М.Фихтенгольц. – СПб. : Лань. - Т. 2. - 2006. - 464 с.

9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Портал научной электронной библиотеки. - Режим доступа: http://elibrary.ru/defaultx.asp
2. Открытый колледж. Математика - Режим доступа: https://mathematics.ru/.
3. Математические этюды. - Режим доступа: http://www.etudes.ru/.
4. Федеральный портал «Российское образование» -Режим доступа: http://www.edu.ru.
5. Сайт Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки. - Режим доступа: http://www.obrnadzor.gov.ru/ru.
6. Сайт Министерства просвещения РФ. - Режим доступа: https://edu.gov.ru.
7. Сайт МЦНМО. – Режим доступа: MCCME: Moscow Center for Continuous Mathematical Education

9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». - Режим доступа: https://urait.ru
2. Полпред (обзор СМИ). - Режим доступа: https://polpred.com/news

10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, с выходом в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами, учебно-наглядными пособиями (мультимедийные презентации).

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Microsoft®WINEDUperDVC AllLng Upgrade/SoftwareAssurancePack Academic OLV 1License LevelE Platform 1Year; Microsoft®OfficeProPlusEducation AllLng License/SoftwareAssurancePack Academic OLV 1License LevelE Platform 1Year; Dr.Web Security Suite; Java Runtime Environment; Calculate Linux.

Разработчик: Пушкина О.Н., кандидат педагогических наук, доцент

11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2024/2025 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2024/2025 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «24» мая 2024 г.).

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2025/2026 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2025/2026 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «21» мая 2025 г.).