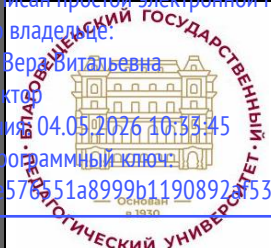


Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Щёкина Вера Битальевна
Должность: Ректор
Дата подписания: 04.05.2026 10:55:45
Уникальный программный ключ:
a2232a55157e576551a8999b1190892af53989420420336ffbf573a434e57789

	МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»
ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА Рабочая программа дисциплины	

УТВЕРЖДАЮ

декан факультета

физико-математического

образования и технологии

ФГБОУ ВО «БГПУ»



Н.В.Слесаренко

«03» сентября 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины
ЧИСЛОВЫЕ СИСТЕМЫ**

**Направление подготовки
44.03.05 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
(с двумя профилями подготовки)**

**Профиль
«ИНФОРМАТИКА»**

**Профиль
«МАТЕМАТИКА»**

**Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ**

**Принята
на заседании кафедры физического и
математического образования
(протокол № 9 от «24» мая 2024 г.)**

Благовещенск 2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	3
2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ	4
3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ	5
4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....	5
5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ	7
6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА.....	11
7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ.....	22
В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ.....	22
8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ	22
9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ	22
10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА	23
11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ.....	25

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель дисциплины: углубить и расширить представление будущего учителя математики о понятии числа как элемента соответствующей числовой системы.

1.2 Место дисциплины в структуре ООП: Дисциплина «Числовые системы» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений предметного модуля по математике блока Б1 (Б1. В.01.09).

1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: ПК-2:
- ПК-2. Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования; индикаторами достижения которой является:

- ПК-2.2 Владеет основными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения. В результате изучения дисциплины студент должен

знать:

- аксиоматическое построение числовых систем;
- понятие минимального расширения при переходе от одной системы к другой;
- изоморфизм различных моделей одной и той же системы;
- основные числовые системы и их свойства;
- архимедовость основных числовых систем;
- дискретность и бесконечность множеств натуральных и целых чисел;
- плотность и счетность множества рациональных чисел;
- плотность, непрерывность и несчетность множества действительных чисел;

уметь:

- обосновывать числовые законы, используемые без доказательства в школьном курсе математики;
- строить модели числовых систем;

владеть:

- навыками решения типовых задач.

1.5 Общая трудоемкость дисциплины «Числовые системы» составляет 2 зачетных единиц (далее – ЗЕ) (72 часа):

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и практических занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Объем дисциплины и виды учебной деятельности (очная форма обучения)

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 8
Общая трудоемкость	72	72
Аудиторные занятия	36	36
Лекции	14	14
Практические занятия	22	22
Самостоятельная работа	36	36
Вид итогового контроля	-	зачёт
Интерактив		10

2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

2.1 Очная форма обучения

Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
1.	Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел	14	2	6	6
2.	Тема 2. Упорядоченные множества и системы. Аксиоматическая теория целых чисел	8	2	4	2
3.	Тема 3. Аксиоматическая теория рациональных чисел	10	2	2	6
4.	Тема 4. Последовательности в нормированных полях	10	2	2	6
5.	Тема 5. Аксиоматическая теория действительных чисел	12	2	4	6
6.	Тема 6. Аксиоматическая теория комплексных чисел	10	2	2	6
7.	Тема 7. Линейные алгебры над полями.	8	2	2	4
Зачёт					
ИТОГО		72	14	22	36

Интерактивное обучение по дисциплине

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел. Свойства сложения и умножения натуральных чисел	ПР	работа в малых группах	2
2.	Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел. Эквивалентность аксиомы индукции и теоремы о наименьшем элементе	ПР	работа в малых группах	2
3.	Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел. Порядок в системе натуральных чисел	ПР	работа в малых группах	2
4.	Тема 5. Аксиоматическая теория действительных чисел	ПР	работа в малых группах	2
5.	Тема 7. Линейные алгебры над полями	ПР	работа в малых группах	2
ИТОГО				10

3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ

Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел

Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел. Свойства сложения и умножения натуральных чисел. Теоремы, подготавливающие введение порядка на \mathbb{N} . Определение и свойства неравенств на \mathbb{N} . Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел. Бесконечность множества натуральных чисел. Натуральные кратные и степени элементов полугруппы, их свойства. Категоричность аксиоматической теории натуральных чисел. Аксиоматика Пеано. Определение, существование и единственность суммы и произведения. Эквивалентность двух формулировок аксиоматической теории натуральных чисел. Независимость аксиом Пеано. Независимость аксиомы индукции, и ее роль в арифметике. Эквивалентность аксиомы индукции и теоремы о наименьшем элементе.

Тема 2. Упорядоченные множества и системы

Определение упорядоченного множества, упорядоченной группы, упорядоченного кольца. Свойства элементов линейно упорядоченного кольца. Критерий существования, однозначности и продолжения порядка в кольце. Примеры колец с неоднозначным порядком, с не архимедовым порядком. Теорема о единственности порядка в полукольце натуральных чисел. Аксиоматическая теория целых чисел. Первичные термины и аксиомы. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на \mathbb{Z} . Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории целых чисел.

Тема 3. Аксиоматическая теория рациональных чисел

Первичные термины и аксиомы. Свойства рациональных чисел. Теорема о порядке поля рациональных чисел. Теорема о существовании в линейно строго упорядоченном поле подполя, изоморфного полю рациональных чисел. Плотность поля рациональных чисел. Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории рациональных чисел.

Тема 4. Последовательности в нормированных полях

Определение и свойства нормы. Примеры нормированных полей. Свойства эквивалентности, фундаментальности, сходимости, ограниченности последовательностей нормированного поля, линейно упорядоченного поля, архимедовски линейно упорядоченного поля.

Тема 5. Аксиоматическая теория действительных чисел

Первичные термины и аксиомы. Свойства действительных чисел: действительное число есть предел последовательности рациональных чисел, существование корня натуральной степени из положительного действительного числа, единственность порядка в \mathbb{R} , теорема о двойной последовательности, теорема о сечении. Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории действительных чисел. Понятие о p -адических числах.

Тема 6. Аксиоматическая теория комплексных чисел

Первичные термины и аксиомы. Свойства комплексных чисел. Теоремы о порядке на \mathbb{C} . Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории комплексных чисел.

Тема 7. Линейные алгебры над полями

Линейные алгебры над полем. Базис и ранг линейной алгебры. Линейные алгебры конечного ранга над полем комплексных чисел. Линейные алгебры конечного ранга над полем действительных чисел. Кватернионы. Теорема Фробениуса. Понятие о теореме Кэли.

4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Общие методические рекомендации

Согласно учебному плану, организация учебной деятельности по дисциплине «Числовые системы» предусматривает следующие формы: лекция, практическое занятие, самостоятельная работа, контрольная работа. Успешное изучение курса требует от студентов

посещения лекций, активной работы на практических занятиях, выполнения всех учебных заданий преподавателя, ознакомления с литературой.

4.2 Методические рекомендации по подготовке к лекциям

Курс лекций строится на основе четких понятий и формулировок, так, как только при таком походе студенты приобретают культуру абстрактного мышления, необходимую для высококвалифицированного специалиста в любой отрасли знаний, а также на разборе типовых задач и алгоритмов их решения. Необходимо избегать механического записывания текста лекции без осмысливания его содержания.

4.3. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям

При подготовке к практическим занятиям студент должен просмотреть конспекты лекций, рекомендованную литературу по данной теме; подготовиться к ответу на контрольные вопросы.

4.4. Методические указания к самостоятельной работе студентов

Для успешного усвоения дисциплины необходима правильная организация самостоятельной работы студентов. Эта работа должна содержать:

- регулярную (еженедельную) проработку теоретического материала по конспектам лекций и рекомендованной литературе;
- регулярную (еженедельную) подготовку к практическим занятиям, в том числе выполнение домашних заданий;
- подготовка к контрольной работе и ее успешное выполнение.

В качестве образца решения задач следует брать те решения, которые приводились преподавателем на лекциях или выполнялись на практических занятиях. При появлении каких-либо вопросов следует обращаться к преподавателю в часы его консультаций. Критерием качества усвоения знаний могут служить аттестационные оценки по дисциплине и текущие оценки, выставляемые преподавателем в течение семестра. При подготовке к контрольной работе по определенному разделу дисциплины полезно выписать отдельно все формулы, относящиеся к данному разделу, и все используемые в них обозначения. Также при подготовке к контрольной работе следует просмотреть конспект практических занятий и выделить в практические задания, относящиеся к данному разделу. Если задания на какие – то темы не были разобраны на занятиях (или решения которых оказались не понятными), следует обратиться к учебной литературе, рекомендованной преподавателем в качестве источника сведений. Полезно при подготовке к контрольной работе самостоятельно решить несколько типичных заданий по соответствующему разделу. В каждом семестре предусматривается проведение одной контрольной работы.

В течение преподавания дисциплины «Числовые системы» в качестве форм текущей аттестации студентов используются такие формы как, компьютерный тест (СЭО БГПУ).

4.5. Методические указания к зачету

При подготовке к зачету по дисциплине «Числовые системы» особое внимание следует обратить на четкое знание понятийного аппарата дисциплины. Подготовку к зачету наиболее рационально осуществлять путем повторения и систематизации материала с помощью кратких конспектов. Студент должен уяснить наиболее важные идеи каждой темы, такие как «бесконечность множества натуральных чисел», «архимедовость порядка системы действительных чисел», «расширение системы рациональных чисел по заданной норме» и т.д.

**Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы
студентов по дисциплине**

№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
1.	Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел	Подготовка к семинарским занятиям.	6
2.	Тема 2. Упорядоченные множества и системы. Аксиоматическая теория целых чисел	Подготовка к семинарским занятиям.	2
3.	Тема 3. Аксиоматическая теория рациональных чисел	Контрольная работа (письменный контроль)	6
4.	Тема 4. Последовательности в нормированных полях	Подготовка к семинарским занятиям.	6
5.	Тема 5. Аксиоматическая теория действительных чисел	Контрольная работа (письменный контроль)	6
6.	Тема 6. Аксиоматическая теория комплексных чисел	Подготовка к семинарским занятиям.	6
7.	Тема 7. Линейные алгебры над полями	Подготовка к семинарским занятиям.	4
	ИТОГО		36

5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел

Занятие №1 (2 часа)

Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел. Свойства сложения и умножения натуральных чисел. Теоремы, подготавливающие введение порядка на \mathbb{N} . Определение и свойства неравенств на \mathbb{N} . Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел. Бесконечность множества натуральных чисел. Натуральные кратные и степени элементов полугруппы, их свойства.

Литература:

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – с. 6-36.
2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – с. 16-49.
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – с. 52-76.
4. Любецкий, В. А. Элементарная математика с точки зрения высшей. Основные понятия: учебное пособие для вузов / В. А. Любецкий. — 3-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10421-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/517029> . – с. 345-346.

Занятие №2 (2 часа)

Категоричность аксиоматической теории натуральных чисел. Определение, существование и единственность суммы и произведения. Аксиоматика Пеано. Эквивалентность двух формулировок аксиоматической теории натуральных чисел. Независимость аксиом Пеано.

Литература:

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – с. 6-36
2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – с. 16-49.
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – с. 52-76.
4. Блох, А.Ш. Числовые системы / А.Ш. Блох. Учеб. Пособие для пед. ин-тов по мат. спец. – Минск: Высшейш. школа, 1982. – 160 с.
5. Любецкий, В. А. Элементарная математика с точки зрения высшей. Основные понятия: учебное пособие для вузов / В. А. Любецкий. — 3-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10421-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/517029> . – с. 345-346.

Занятие №3 (2 часа)

Независимость аксиомы индукции и ее роль в арифметике. Эквивалентность аксиомы индукции и теоремы о наименьшем элементе.

Литература:

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – с. 6-36.
2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – с. 16-49.
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – с. 52-76.
4. Любецкий, В. А. Элементарная математика с точки зрения высшей. Основные понятия: учебное пособие для вузов / В. А. Любецкий. — 3-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10421-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/517029> . – с. 345-346.

Тема 2. Упорядоченные множества и системы. Аксиоматическая теория целых чисел

Занятие №4 (2 часа)

Определение упорядоченного множества, упорядоченной группы, упорядоченного кольца. Свойства элементов линейно упорядоченного кольца.

Критерий существования, однозначности и продолжения порядка в кольце.

Примеры колец с неоднозначным порядком, с не архимедовым порядком.

Теорема о единственности порядка в полукольце натуральных чисел.

Литература:

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – с. 52-62.
2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – с. 37-50.
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – с. 95-107.

4. Кантор, И.Л. Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор. – М.: Наука, 1973. – с. 5-9
5. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовнича, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова, В. А. Ильин; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 109 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08472-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515327> . – с. 45-67.
6. Любецкий, В. А. Элементарная математика с точки зрения высшей. Основные понятия: учебное пособие для вузов / В. А. Любецкий. — 3-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10421-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/517029> . – с. 354.

Занятие №5 (2 часа)

Первичные термины и аксиомы. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на Z .
Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории целых чисел.

Литература:

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – с. 52-62
2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – с. 37-50.
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – с. 95-107.
4. Кантор, И.Л. Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор. – М.: Наука, 1973. – с. 5-9
5. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовнича, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова, В. А. Ильин; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 109 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08472-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515327> . – с. 45-67.
6. Любецкий, В. А. Элементарная математика с точки зрения высшей. Основные понятия: учебное пособие для вузов / В. А. Любецкий. — 3-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10421-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/517029> . – с. 354.

Тема 3. Аксиоматическая теория рациональных чисел

Занятие №6 (2 часа)

Плотность поля рациональных чисел.

Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории рациональных чисел.

Литература:

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – с. 52-62.

2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – с. 64-76.
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – с. 95-107.

Тема 4. Последовательности в нормированных полях

Занятие №7 (2 часа)

Определение и свойства нормы.

Свойства эквивалентности, фундаментальности, сходимости, ограниченности последовательностей нормированного поля, линейно упорядоченного поля, архимедовски линейно упорядоченного поля.

Литература:

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – с. 63-81
2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – с. 77-120.
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – с. 126-143.
4. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовнича, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова, В. А. Ильин; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 109 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08472-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515327>. — с. 45-67.

Тема 5. Аксиоматическая теория действительных чисел

Занятие №8 (2 часа)

Первичные термины и аксиомы.

Свойства действительных чисел: действительное число есть предел последовательности рациональных чисел, существование корня натуральной степени из положительного действительного числа, единственность порядка в \mathbb{R} , теорема о двойной последовательности, теорема о сечении.

Занятие №9 (2 часа)

Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории действительных чисел.

Понятие о p -адических числах

Литература:

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – с. 63-81
2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – с. 77-120.
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – с. 126-143.
4. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовнича, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова, В. А. Ильин; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 109 с. — (Професси-

ональное образование). — ISBN 978-5-534-08472-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515327>. — с. 45-67.

Тема 6. Аксиоматическая теория комплексных чисел

Занятие №10 (2 часа)

Первичные термины и аксиомы.

Свойства комплексных чисел.

Теоремы о порядке на \mathbb{C} .

Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории комплексных чисел

Литература:

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – с. 84-90.
2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – с. 128-135.
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – с. 164-166.
4. Кантор, И.Л. Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор. – М.: Наука, 1973. – с. 5-9.

Тема 7. Линейные алгебры над полями

Занятие №11 (2 часа)

Линейные алгебры над полем. Базис и ранг линейной алгебры. Линейные алгебры конечного ранга над полем комплексных чисел. Линейные алгебры конечного ранга над полем действительных чисел. Теорема Фробениуса

Литература:

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – с. 106.
2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – с. 136-142.
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – с. 168-171.
4. Кантор, И.Л. Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор. – М.: Наука, 1973. – с. 5-47.

6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
ПК-2	Самостоятельная работа	Низкий (неудовлетворительно)	Самостоятельная работа не засчитывается, если студент: 1) допустил число ошибок и недочетов, превосходящее норму, при которой может быть достигнут пороговый показатель;

			2) или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил: 1) не более двух грубых ошибок; 2) или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета; 3) или не более двух-трех негрубых ошибок; 4) или одной негрубой ошибки и трех недочетов; 5) или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
		Базовый (хорошо)	Студент выполнил работу полностью, но допустил в ней: 1) не более одной негрубой ошибки и одного недочета; 2) или не более двух недочетов.
		Высокий (отлично)	Студент 1) выполнил работу без ошибок и недочетов; 2) допустил не более одного недочета.

6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

Критерии оценивания устного ответа на практическом занятии

Развернутый ответ студента должен представлять собой связное, логически последовательное сообщение на заданную тему, показывать его умение применять определения, правила в конкретных случаях.

Критерии оценивания:

- 1) полноту и правильность ответа;
- 2) степень осознанности, понимания изученного;
- 3) языковое оформление ответа.

Оценка «отлично» ставится, если:

1) студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;

2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные;

3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.

«хорошо» – студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «5», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

«удовлетворительно» – студент обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но:

1) излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;

2) не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;

3) излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает незнание большей части соответствующего вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал. Оценка «2» отмечает такие недостатки в подготовке, которые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.

Критерии оценивания самостоятельных работ

Оценка «отлично» ставится, если студент:

1. выполнил работу без ошибок и недочетов;
2. допустил не более одного недочета.

Оценка «хорошо» ставится, если студент выполнил работу полностью, но допустил в ней:

1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета;
2. или не более двух недочетов.

Оценка «удовлетворительно» ставится, если студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил:

1. не более двух грубых ошибок;
2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета;
3. или не более двух-трех негрубых ошибок;
4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов;
5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.

Оценка «неудовлетворительно» ставится, если студент:

1. допустил число ошибок и недочетов, превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3»;
2. или если правильно выполнил менее половины работы.

Критерии оценивания на зачете

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если:

- задания, размещенные в Электронной информационно-образовательной среде БГПУ выполнены на 60 и более процентов;
- он имеет посещаемость практических занятий не менее 60 процентов.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если:

- задания, размещенные в Электронной информационно-образовательной среде БГПУ выполнены менее чем на 60 процентов;
- он имеет посещаемость практических занятий менее 60 процентов (исключение составляют студенты, пропустившие занятия по уважительной причине: болезни, участия в значимых для вуза мероприятиях, таких как участие в олимпиадах по профилю и т.п.).

6.3 Оценочные средства для проверки уровня сформированности компетенций: ПК-2

Тесты содержит следующие типы заданий

Тип задания	№ задания	Вес задания (балл)	Результат оценивания (баллы, полученные за выполнение задания / характеристика правильности ответа)
задания закрытого типа с выбором одного правильного (1 из 4)	1, 2, 3	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором одного правильного ответа по схеме: «верно»/ «неверно»	4, 5	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором нескольких правильных ответов (3 из 6)	6, 7	2 балла	2 б – полное правильное соответствие (последовательность вариантов ответа может быть любой); 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задания закрытого типа на установление соответствия (4 на 4)	8, 9	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задание закрытого типа на установление последовательности	10, 11	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задания открытого типа с кратким ответом	12, 13	3 балла	3 б – полное правильное соответствие; 0 б – остальные случаи.
задания открытого типа с развернутым ответом	14, 15	5 баллов	5 б – полное правильное соответствие; если допущена одна ошибка/неточность / ответ правильный, но не полный - 3 балла; если допущено более одной ошибки / ответ неправильный / ответ отсутствует – 0 баллов

Формируемая компетенция	Индикаторы сформированности компетенции
ПК-2. Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования	ПК-2.2 Владеет основными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов.

Задание 1

Внимательно прочитайте задание и укажите один правильный вариант ответа:
Какое из следующих множеств является полем?

- 1) Чётные целые числа
- 2) Целые числа по модулю 12
- 3) Числа вида $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{Z}$
- 4) Числа вида $a + b\sqrt{3}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$

Ответ: 4

Задание 2

Внимательно прочитайте задание и укажите один правильный вариант ответа:
Какое из свойств отличает множество действительных чисел от множества рациональных чисел?

- 1) Упорядоченность
- 2) Архимедовость
- 3) Полнота (непрерывность)
- 4) Бесконечность

Ответ: 3

Задание 3

Внимательно прочитайте задание и укажите один правильный вариант ответа:
При каком условии два комплексных числа $a + bi$ и $c + di$ являются сопряжёнными?

- 1) $a = c, b = d$
- 2) $a = c, b = -d$
- 3) $a = -c, b = d$
- 4) $a = -c, b = -d$

Ответ: 2

Задание 4

Верно ли следующее утверждение?
"Множество иррациональных чисел замкнуто относительно операции сложения"

Ответ: не верно

Задание 5

Верно ли следующее утверждение?
"Любое комплексное число можно представить в тригонометрической форме"

Ответ: верно

Задание 6

Внимательно прочитайте задание и укажите три правильных варианта ответа:
Какие из следующих множеств являются счётными?

- 1) Натуральные числа
- 2) Рациональные числа
- 3) Действительные числа
- 4) Алгебраические числа
- 5) Трансцендентные числа
- 6) 2- адические числа

Ответ: 1, 2, 4

Задание 7

Внимательно прочитайте задание и укажите три правильных варианта ответа:
Для каких числовых систем выполняется свойство архимедовости?

- 1) Натуральные числа
 - 2) Целые числа
 - 3) Множество пар действительных чисел с лексикографическим упорядочиванием
 - 4) Действительные числа
 - 5) Множество комплексных чисел на окружности
 - 6) 2- адические числа
- Ответ: 1, 2, 4

Задание 8

Установите соответствие между числовыми системами и их конструкциями:

Целые числа : Пополнение натуральных чисел относительно вычитания

Рациональные числа : Пополнение целых чисел относительно деления

Действительные числа : Пополнение рациональных чисел относительно сходимости

Комплексные числа : Алгебраическое пополнение действительных чисел

Задание 9

Установите соответствие между свойствами и числовыми системами, для которых они выполняются:

Дискретность : \mathbb{Z} - целые числа

Плотность : \mathbb{Q} - рациональные числа

Непрерывность : \mathbb{R} - действительные числа

Алгебраическая замкнутость : \mathbb{C} - комплексные числа

Задание 10

Расположите в правильном порядке этапы построения системы p -адических чисел:

- 1 : Определение p -адической нормы
- 2 : Построение поля частных
- 3 : Введение p -адических целых
- 4 : Пополнение относительно p -адической нормы

Задание 11

Расположите числовые системы в порядке увеличения мощности:

- 1 : Натуральные числа
- 2 : Рациональные числа
- 3 : Действительные числа
- 4 : Комплексные числа

Задание 12

Пусть $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$. Какую алгебраическую структуру образует числовая система $\langle K; +, \cdot \rangle$.

Ответ: тело

Задание 13

Минимальная числовая система, в которой разрешимо уравнение $x^3 = 2$, это...

Ответ: действительные числа

Задание 14

Внимательно прочитайте задание и запишите развернутый обоснованный ответ:

Вычислите произведение 5-адических чисел

$a = \dots 13132_5$, $b = \dots 34214_5$

(записанных в 5-адической записи, где младшие разряды справа), выполняя действия по-разрядно с учётом переносов.

Решение:

Запишем числа с выравниванием по младшим разрядам:

Умножение:

Умножим сначала на младший разряд b (4):

$$\begin{aligned} a \times 4 : \dots 13132_5 \times 4_5 \\ 2 \times 4 = 8 = 1 \cdot 5 + 3 \quad (\text{пишем } 3, \text{ перенос } 1) \\ 3 \times 4 + 1 = 13 = 2 \cdot 5 + 3 \quad (\text{пишем } 3, \text{ перенос } 2) \\ 1 \times 4 + 2 = 6 = 1 \cdot 5 + 1 \quad (\text{пишем } 1, \text{ перенос } 1) \\ 3 \times 4 + 1 = 13 = 2 \cdot 5 + 3 \quad (\text{пишем } 3, \text{ перенос } 2) \\ 1 \times 4 + 2 = 6 = 1 \cdot 5 + 1 \quad (\text{пишем } 1, \text{ перенос } 1) \end{aligned}$$

Получаем:

$$a \times 4 = \dots 13133_5$$

Аналогично, умножаем a на остальные разряды b со сдвигом и складываем результаты.

После выполнения всех действий:

Ответ: $a \times b = \dots 32433_5$

Задание 15

Внимательно прочитайте задание и запишите развернутый обоснованный ответ:

Докажите методом математической индукции, что для любого натурального $n \geq 1$ выполняется равенство:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Решение:

1. **База индукции:** Проверим для $n=1$.

Левая часть:

$$1^2 = 1$$

Правая часть:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

Равенство выполняется.

2. **Индукционное предположение:**

Предположим, что для $n=k$ равенство верно:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

3. **Индукционный переход:** Докажем для $n=k+1$

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Разложим на множители:

$$2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$$

Получим:

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Это соответствует формуле для $n=k+1$, так как:

$$\frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Ответ: равенство доказано методом математической индукции для всех натуральных $n \geq 1$.

6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1

1. Пусть $P_1 = \{\langle m, n \rangle \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Определим на P_1 отношения \oplus , \otimes и \sim . Для любых элементов $\langle m, n \rangle, \langle k, l \rangle$ из P_1 :

$$\begin{aligned}\langle m, n \rangle \oplus \langle k, l \rangle &= \langle m+k, n+l \rangle \\ \langle m, n \rangle \otimes \langle k, l \rangle &= \langle mk+nl, ml+nk \rangle \\ \langle m, n \rangle \sim \langle k, l \rangle &\Leftrightarrow m+l = k+n\end{aligned}$$

Являются ли \oplus и \otimes на P_1 алгебраическими операциями?

Каков ранг каждой из этих операций? Выполняются ли ассоциативность, коммутативность каждой бинарной операции?

Дистрибутивно ли \otimes относительно \oplus ?

Существуют ли нейтральные элементы относительно каждой из операций? Сократимы ли эти операции? Является ли система $\langle P_1, \oplus, \otimes \rangle$ полукольцом? кольцом? телом?

Рефлексивно ли, транзитивно ли, симметрично ли отношение " \sim "? Является ли оно отношением порядка? эквивалентности? Монотонно ли это отношение относительно \oplus и \otimes ?

2. Пусть $P_2 = \{\langle a, n \rangle \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Если $\langle a, n \rangle, \langle b, m \rangle \in P_2$, то

$$\begin{aligned}\langle a, n \rangle \oplus \langle b, m \rangle &= \langle am+bn, mn \rangle \\ \langle a, n \rangle \otimes \langle b, m \rangle &= \langle ab, mn \rangle\end{aligned}$$

Являются ли системы $\langle P_2; \oplus \rangle, \langle P_2; \otimes \rangle$ полугруппами? группами?

Коммутативны ли \oplus и \otimes ? Является ли система $\langle P_2; \oplus, \otimes \rangle$ полукольцом? полем?

Определим на P_2 отношение $\omega : \langle a, n \rangle \omega \langle b, m \rangle \Leftrightarrow am = bn$.

Каков ранг отношения ω ? Является ли отношение ω отношением эквивалентности? Монотонно ли оно относительно \oplus и относительно \otimes ?

3. Пусть $P_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Определим \oplus и \otimes на P_3 следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle &= \langle a+c, b+d \rangle \\ \langle a, b \rangle \otimes \langle c, d \rangle &= \langle ac-bd, ad+bc \rangle\end{aligned}$$

а) Проверить, являются ли системы $\langle P_3; \oplus \rangle, \langle P_3; \otimes \rangle$ полугруппами. Коммутативны ли они?

б) Найти θ, e - элементы P_3 такие, чтобы для любого элемента α , принадлежащего P_3 , выполнялись равенства: $\alpha \oplus \theta = \theta \oplus \alpha = \alpha$, $\alpha \otimes e = e \otimes \alpha = \alpha$.

в) Решить на P_3 уравнение: $x^2 \oplus e = \theta$.

д) Является ли система $\langle P_3; \oplus, \otimes \rangle$ кольцом? полем?

е) Доказать, что для любых элементов $\alpha \neq \theta, \beta$ из P_3 уравнение $\alpha \otimes x = \beta$ разрешимо в P_3 .

4. Матрицу вида, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ и если $\alpha = a + bi$, то $\bar{\alpha} = a - bi$, назовем кватернионом.

Пусть $K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$. Доказать, что система $\langle K; +, \cdot \rangle$ - кольцо. Коммутативно ли оно? Является ли кольцо $\langle K; +, \cdot \rangle$ телом? полем? Доказать.

Решить на K уравнение: $\begin{pmatrix} 1+i & 5-i \\ -5-i & 1-i \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$.

Пусть $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Доказать, что для любого $q \in K$ существует единственная четверка $\langle r_1, r_2, r_3, r_4 \rangle \in \mathbb{R}^4$ такая, что $q = r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3 + r_4 e_4$.

Составить таблицу умножения элементов e_1, e_2, e_3, e_4 .

5. Пусть $\langle K; +, \cdot \rangle$ - тело, e_1, e_2, e_3, e_4 - элементы K , обладающие свойствами:
для любого α из K $\alpha \cdot e_1 = e_1 \cdot \alpha = \alpha$;

$$e_3 \cdot e_2 = -e_2 \cdot e_3 = -e_4 ;$$

$$e_2^2 = e_3^2 = -e_1$$

Составить таблицу умножения элементов e_1, e_2, e_3, e_4 . Проверить, совпадает ли она с таблицей задачи 4.

Вариант 2

1. Пусть θ - любой комплексный корень уравнения $x^3 = 2$,

$$Q(\theta) = \{a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\}$$

Показать, что $Q(\theta) = \langle Q(\theta); +, \cdot, 0, 1 \rangle$ - поле, если $+$, \cdot - сложение и умножение комплексных чисел.

2. Пусть $F = \left\{ \left\{ a_n \right\}_n \mid \left\{ a_n \right\}_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}, \left\{ a_n \right\}_n - \text{фундаментальная} \right\}$

$$\left\{ a_n \right\}_n \oplus \left\{ b_n \right\}_n = \left\{ a_n + b_n \right\}_n$$

$$\left\{ a_n \right\}_n \otimes \left\{ b_n \right\}_n = \left\{ a_n \cdot b_n \right\}_n$$

Является ли система $\langle F; \oplus, \otimes \rangle$ полукольцом? кольцом? телом? полем? Доказать. Существуют ли нейтральные элементы относительно каждой из операций и если да, то какие?

Будем говорить, что две последовательности $\left\{ a_n \right\}_n, \left\{ b_n \right\}_n$ из F находятся в отношении « \sim », если последовательность $\left\{ a_n - b_n \right\}_n$ - нулевая. Является ли отношение " \sim " эквивалентностью?

Монотонно ли это отношение относительно сложения?

3. Определим на \mathbb{P}_3 отношение « $>$ ». Пусть $\langle a, b \rangle, \langle a', b' \rangle \in \mathbb{P}_3$.

$$\langle a, b \rangle > \langle a', b' \rangle \Leftrightarrow (a > a') \vee (a = a' \ \& \ b > b')$$

Является ли отношение $>$, определенное на \mathbb{P}_3 , эквивалентностью? порядком? Монотонно ли это отношение относительно \oplus, \otimes , введенных в задаче 3? Если $>$ порядок, то строг ли он? нестрог ли он?

4. Пусть $N' = \{ \langle n, x \rangle \mid n \in \mathbb{N}, x \in (0, 1) \}$; $e = \langle 1, 0 \rangle$,

$$\langle n, x \rangle \oplus \langle m, y \rangle = \begin{cases} \langle n + m, x \rangle, & xy = 0 \\ \langle m, 1 \rangle, & xy = 1 \end{cases}$$

$$\langle n, x \rangle \otimes \langle m, y \rangle = \begin{cases} \langle nm, y \rangle, & x = 0 \\ \langle n, 1 \rangle, & x = 1 \end{cases}$$

Проверить выполнение каждой аксиомы аксиоматической теории натуральных чисел в системе $\langle N'; \oplus, \otimes, e \rangle$ и выяснить, коммутативны ли, ассоциативны ли \oplus, \otimes . Дистрибутивно ли \otimes относительно \oplus ? Является ли система $\langle N'; \oplus, \otimes, e \rangle$ интерпретацией аксиоматической теории натуральных чисел? Моделью?

5. Пусть $N' = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N}, a \geq b \right\}$, $e = \frac{1}{1}$, $\alpha \oplus \beta = \alpha + \beta$, $\alpha \otimes \beta = \alpha \cdot \beta$.

Является ли интерпретация $\langle N'; \oplus, \otimes, e \rangle$ моделью аксиоматической теории натуральных чисел?

Доказать, что если $\alpha \in N'$ и $\alpha \neq e$, то существуют $\beta, \gamma \in N'$ такие, что $\alpha = \beta \cdot \gamma$ и при этом $\beta \neq e, \gamma \neq e$.

Самостоятельная работа №2

Вариант 1

- Решить на множестве натуральных чисел:
 - $x^2 = 2$; b) $x^3 = 3$; c) $x^2 = x$; d) $3a = a^2$
- На множестве натуральных чисел найти все решения каждого из уравнений:
 - $4x = 4y + 1$; b) $a + b = 2$; c) $2n + 1 = 2x$; d) $x^2 + y^2 = 5$.
- Вычислить: $2 + 3$; $3 + 5$; $2 \cdot 3$; $3 \cdot 7$.
- Пусть $a, b, n \in \mathbb{N}$. Доказать справедливость следующих утверждений:
 - $a + a = b + b \Rightarrow a = b$,
 - $a > 2 \Rightarrow \exists (k \in \mathbb{N}) a = 3k \vee a = 3k + 1 \vee a = 3k + 2$,
 - $\exists (x \in \mathbb{N}) (a + 1) \cdot a = 2x$,
 - $n > 1 \Rightarrow \exists (x \in \mathbb{N}) n = 2x \vee n = 2x + 1$,
 - $n \neq 1 \Rightarrow \exists (x \in \mathbb{N}) (n - 1) \cdot n = x + x$,
 - $n \neq 1 \Rightarrow \exists (x \in \mathbb{N}) (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = 3x$.
- Пусть $a, b, n \in \mathbb{N}$. Доказать справедливость следующих утверждений:
 - $a > b \Rightarrow a^n > b^n$,
 - $a^n > b^n \Rightarrow a > b$,
 - $\nexists a^b < a$,
 - $n \neq 1, n \neq 2 \Rightarrow 2^n > 2^n \cdot n + 1$.

Вариант 2

- Доказать, что для любых натуральных a, b, n, m справедливы равенства
 - $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$, b) $(a^n)^m = a^{nm}$,
- Пусть a, b, n, m - натуральные числа. Доказать, что справедливы следующие свойства кратных:
 - $(nm) * a = n * (m * a)$,
 - $(n + m) * a = n * a + m * a$,
 - $n * (a + b) = n * a + n * b$.
- Сформулировать и доказать условия существования и совпадения левых и правых частей равенств на множестве натуральных чисел:
 - $(a + b) - c = a + (b - c)$, b) $(a \cdot b) : c = a \cdot (b : c)$;

4. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. При условии существования в \mathbb{N} разностей $a-b, c-d$ доказать: $a > c, b < d \Rightarrow a - b > c - d$,
5. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Доказать, что если в \mathbb{N} существуют частные $a:b, c:d$ и $d < b, a < c$, то $a : b < c : d$.

Вопросы к зачету

1. Аксиоматическая теория натуральных чисел. Сложение и его свойства.
2. Аксиоматическая теория натуральных чисел. Умножение и его свойства.
3. Теоремы, подготавливающие введение порядка на множестве натуральных чисел. Теорема о трихотомии.
4. Определение и свойства отношения "больше" на множестве натуральных чисел.
5. Теорема о единственности линейного и строгого порядка в полукольце натуральных чисел.
6. Теорема Архимеда и теорема о дискретности на множестве натуральных чисел.
7. Аксиоматическая теория натуральных чисел. Теорема о наименьшем элементе.
8. Аксиоматическая теория натуральных чисел. Теорема о наибольшем элементе.
9. Конечные множества и их свойства. Бесконечность множества натуральных чисел.
10. Разность и частное на множестве натуральных чисел.
11. Категоричность аксиоматической теории натуральных чисел.
12. Независимость аксиомы индукции и ее роль в арифметике.
13. Аксиоматика Пеано. Эквивалентность двух формулировок аксиоматической теории натуральных чисел.
14. Система аксиом Пеано. Введение сложения и умножения на основе аксиоматики Пеано.
15. Независимость аксиом системы Пеано.
16. Свойства упорядоченных полугрупп.
17. Теорема о натуральных кратных ненулевого элемента линейно строго упорядоченной полугруппы.
18. Свойства упорядоченных полуколец.
19. Свойства упорядоченных колец.
20. Теорема о плотности архимедовски линейно строго упорядоченного тела.
21. Критерий существования линейного и строгого порядка кольца.
22. Критерий однозначности линейного и строгого порядка кольца.
23. Критерий продолжения линейного и строгого порядка кольца.
24. Аксиоматическая теория целых чисел. Свойства целых чисел.
25. Теоремы о порядке кольца целых чисел.
26. Категоричность аксиоматической теории целых чисел.
27. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
28. Аксиоматическая теория рациональных чисел. Свойства рациональных чисел.
29. Теоремы о порядке поля рациональных чисел.
30. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.
31. Категоричность аксиоматической теории рациональных чисел.
32. Теорема о существовании подполя линейно строго упорядоченного поля, изоморфного полю рациональных чисел.
33. Нормированные поля. Примеры норм. Свойства нормы.
34. Последовательности в нормированных полях. Теоремы об эквивалентных последовательностях.
35. Последовательности в нормированных полях. Теоремы о фундаментальных и сходящихся последовательностях.
36. Последовательности в нормированных полях. Теорема о возрастающей и ограниченной последовательности.
37. Свойства последовательностей архимедовски упорядоченного поля.
38. Аксиоматическая теория действительных чисел. Теорема о существовании корня.

39. Аксиоматическая теория действительных чисел. Теорема о сечении.
40. Аксиоматическая теория действительных чисел. Теорема о порядке поля действительных чисел. Теорема о двойной последовательности.
41. Категоричность аксиоматической теории действительных чисел.
42. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
43. Аксиоматическая теория комплексных чисел. Свойства комплексных чисел.
44. Категоричность аксиоматической теории комплексных чисел.
45. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.
46. Линейные алгебры конечного ранга над полем комплексных чисел.
47. Теорема Фробениуса о линейных алгебрах конечного ранга над полем действительных чисел.

7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Информационные технологии – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- Официальный сайт БГПУ;
- Корпоративная сеть и корпоративная электронная почта БГПУ;
- Система электронного обучения ФГБОУ ВО «БГПУ»;
- Система «Антиплагиат.ВУЗ»;
- Электронные библиотечные системы;
- Мультимедийное сопровождение лекций и практических занятий.

8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

9.1 Литература

1. Смолин, Ю.Н. Числовые системы / Ю.Н. Смолин. Учеб. Пособие. – М.: Наука, 2009. – 112 с. (12 экз.)
2. Ларин, С.В. Числовые системы / С.В. Ларин. Учеб. Пособие для студ. пед. вузов. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 160 с. (32 экз.)
3. Нечаев, В.И. Числовые системы / В.И. Нечаев. – М.: Просвещение, 1975. – 200 с. (10 экз.)

4. Блох, А.Ш. Числовые системы / А.Ш. Блох. Учеб. Пособие для пед. ин-тов по мат. спец. – Минск: Вышейш. школа, 1982. – 160 с. (12 экз.)
5. Кантор, И.Л. Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа / И.Л. Кантор. – М.: Наука, 1973. – 144 с. (5 экз.)
6. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовнича, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова, В. А. Ильин; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 109 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08472-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515327>
7. Любецкий, В. А. Элементарная математика с точки зрения высшей. Основные понятия: учебное пособие для вузов / В. А. Любецкий. — 3-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10421-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/517029>

9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». - Режим доступа: <http://www.window.edu.ru/>
2. Портал научной электронной библиотеки. - Режим доступа: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>
3. Интернет-Университет Информационных Технологий. - Режим доступа: <https://intuit.ru>
4. Глобальная сеть дистанционного образования. – Режим доступа: <http://www.cito.ru/gdenet> .
5. Российский портал открытого образования. – Режим доступа: <http://www.openet.ru/University.nsf/>
6. Портал бесплатного дистанционного образования. – Режим доступа: www.aniintern.com
7. Открытый колледж. Математика - Режим доступа: <https://mathematics.ru/>.
8. Математические этюды. - Режим доступа: <http://www.etudes.ru/>.
9. Федеральный портал «Российское образование» -Режим доступа: <http://www.edu.ru>.
10. Портал научной электронной библиотеки-Режим доступа: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>.
11. Сайт Министерства науки и высшего образования РФ. - Режим доступа: <https://minobrnauki.gov.ru>.
12. Сайт Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки. - Режим доступа: <http://www.obrnadzor.gov.ru/ru>.
13. Сайт Министерства просвещения РФ. - Режим доступа: <https://edu.gov.ru>.
14. Сайт МЦНМО. – Режим доступа: [MCCME: Moscow Center for Continuous Mathematical Education](https://mccme.ru/)

9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». - Режим доступа: <https://urait.ru>
2. Полпред (обзор СМИ). - Режим доступа: <https://polpred.com/news>

10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, с

выходом в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами, учебно-наглядными пособиями (мультимедийные презентации).

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Microsoft®WINEDUperDVC AllLng Upgrade/SoftwareAssurancePack Academic OLV 1License LevelE Platform 1Year; Microsoft®OfficeProPlusEducation AllLng License/SoftwareAssurancePack Academic OLV 1License LevelE Platform 1Year; Dr.Web Security Suite; Java Runtime Environment; Calculate Linux.

Разработчик: Алутин П.П., кандидат физико-математических наук, доцент

11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2025/2026 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2025/2026 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «21» мая 2025 г.).