	МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»
	ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА Рабочая программа дисциплины

УТВЕРЖДАЮ
Декан
физико-математического факультета
ФГБОУ ВО «БГПУ»
_______________ Т.А. Меределина
«24» мая 2023 г.

Рабочая программа дисциплины
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Направление подготовки
44.03.05 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
(с двумя профилями подготовки)

Профиль
«ИНФОРМАТИКА»

Профиль
«МАТЕМАТИКА»

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Принята
на заседании кафедры физического и математического образования
(протокол № 9 от «24» мая 2023 г.)

Благовещенск 2023

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель дисциплины: овладение классическими методами математики, как общенаучными; формирование систематических знаний основных определений, теорем, теорий из курса математики, алгоритмов и методов решения математических задач и задач, связанных с математическим моделированием; научное обоснование теорем, предложений и методов математики; изучение роли и места дисциплины в системе математических и естественных наук; формирование умений описывать математическим языком реальные физические процессы при решении задач.

1.2 Место дисциплины в структуре ООП: Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» относится к дисциплинам предметного модуля по математике части, формируемой участниками образовательных отношений блока Б1 (Б1.В.01.06).

Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» органично продолжает изучение математики, расширяет и углубляет математические знания студентов, развивает их умения, навыки решать математические и физические задачи.

1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: ПК-2:

- ПК-2. Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования; **индикатором** достижения которой является:

- ПК-2.1 Знает концептуальные и теоретические основы профильных предметов, их место в системе наук и ценностей, историю развития и современное состояние.
- ПК-2.2 Владеет основными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения. В результате изучения дисциплины студент должен

- знать:

- основные понятия, теоремы и методы теории функций нескольких переменных: понятия: функции 2-х, 3-х переменной, области определения, множества значений, графика функции 2-х переменных, линии уровня, поверхности уровня, предела функции, непрерывности функции в точке, частной производной первого и высших порядков, дифференциала первого и высших порядков, экстремума функции 2-х переменных, производной по направлению, градиента, экстремума функции 2-х переменных, двойного и тройного интегралов, криволинейных интегралов I и II рода; свойства предела функции и функций, непрерывных в точке; уравнение касательной плоскости и нормали, алгоритмы нахождения производных высших порядков; алгоритмы нахождения экстремума функций двух переменных, наибольшего и наименьшего значений функции на компакте; свойства двойного и тройного интегралов, криволинейных интегралов I и II рода, методы их вычисления; алгоритм восстановления функции с помощью полного дифференциала;

- уметь:

- находить и строить на чертеже область определения функции 2-х, 3-х переменных, вычислять пределы функции 2-х переменных, исследовать непрерывность функции 2-х переменных в точке,
- находить частные производные, дифференциалы,
- составлять уравнение касательной плоскости, нормали,
- исследовать экстремум функции 2-х переменных,
- находить наибольшее и наименьшее значения функции 2-х переменных на компакте,
- вычислять двойные, тройные, криволинейные интегралы,
- восстанавливать функцию с помощью криволинейного интеграла II рода;

- владеть: умениями

- находить область определения функции 2-х переменных, находить пределы функции 2-х переменных, применяя полярные координаты,

- находить частные производные,
- исследовать экстремум функции 2-х переменных,
- находить наибольшее и наименьшее значения на компакте,
- строить область интегрирования, вычислять повторные интегралы, двойные, криволинейные II рода.

1.5 Общая трудоемкость дисциплины «Дополнительные главы математического анализа» составляет 2 зачетные единицы (далее – ЗЕ) (72 часа):

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и практических занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 5
Общая трудоемкость	72	72
Аудиторные занятия	36	36
Лекции	14	14
Практические занятия	22	22
Самостоятельная работа	36	36
Вид итогового контроля	-	зачет

2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

2.1 Очная форма обучения

Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
1.	Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	36	8	12	16
2.	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	36	6	10	20
	Зачет				
ИТОГО		**72**	**14**	**22**	**36**

Интерактивное обучение по дисциплине

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Практическое занятие	Работа в парах, по группам, индивидуальная работа студента с отчетом преподавателю	4,5
2.	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	Практическое занятие	Работа в парах, по группам	2
ИТОГО				**6,5**

3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

Тема 1. Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Понятие функций 2-х, 3-х переменных. График функции двух переменных. Предел и непрерывность функций 2-х, 3-х переменных. Частные производные функций нескольких переменных, из геометрический смысл. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Дифференциал и дифференцируемость функции нескольких переменных; геометрический смысл полного дифференциала. Дифференцируемость сложной функции, инвариантность формы записи полного дифференциала. Дифференцирование неявно заданных функций. Производная по направлению; градиент; производные и дифференциалы высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных.

Тема 2. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Двойной интеграл, его свойства, методы вычисления, применения в геометрии. Тройной интеграл, его свойства, методы вычисления, применения в геометрии. Криволинейные интегралы I и II рода, их свойства, методы вычисления, некоторые применения.

4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Данные рекомендации предназначены для студентов физико-математического факультета направления подготовки бакалавра «44.03.05 Педагогическое образование» профиль «Математика», профиль «Информатика».

Процесс обучения указанной дисциплине преследует следующие **цели**:

- ознакомить студентов с основными понятиями теории функций нескольких действительных переменных, методами решения задач, относящимися к этому разделу математического анализа,
- научно обосновать теоремы и предложения курса,
- в комплексе с другими математическими дисциплинами продолжить развитие математической культуры логических рассуждений и правильной устной и письменной математической речи.

В результате изучения дисциплины студент **должен иметь представление** о месте и роли теории функций нескольких переменных в математическом анализе, в истории науки, в современной математике, об использовании методов математического анализа в физике и других естественных науках; **должен знать** основные понятия, теоремы курса, виды моделей и способы их построения, предлагаемые этой дисциплиной, методы решения основных типов задач; **должен уметь** находить область определения функций 2-х и 3-х переменных, строить её на чертеже, вычислять пределы функций нескольких переменных, дифференцировать, интегрировать функции нескольких переменных.

Теоретический материал курса представлен планом лекционных занятий с указанием вопросов, рассматриваемых на каждой лекции.

Учебно-методические материалы по подготовке практических занятий содержат планы проведения занятий с указанием последовательности рассматриваемых тем, задания для решения в группе и задания для самостоятельной работы.

В рабочей программе представлен примерный вариант контрольных и самостоятельных работ, которые позволяют проверить уровень усвоения изученного материала.

Рабочая программа содержит программу зачета, которая позволяет наиболее эффективно организовать подготовку к нему. При подготовке к занятиям и зачету студенты могут использовать литературу, приведенную в рабочей программе.

Подготовку к зачету наиболее рационально осуществлять путем повторения и систематизации курса с помощью кратких конспектов. При работе с теоретическим материалом студент должен уяснить наиболее важные идеи каждой темы, уметь пользоваться основными понятиями и утверждениями (знать их формулировки, демонстрировать их использование на примерах, понимать условия применения и т.д.). Как правило, каждая тема, изученная в рамках курса, содержит ряд основных задач, приёмами и методами решения которых должен владеть студент.

Изучать материал рекомендуется по плану, представленному в плане лекций (см. выше). После изучения теоретических основ каждой темы рекомендуется выполнить задания из практического занятия.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
1.	Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Домашнее задание Контрольная работа Подготовка к зачёту	16
2.	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	Домашнее задание Подготовка к зачёту	20
	ИТОГО		**36**

5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Тема 1. Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Практическое занятие 1. Функции 2-х, 3-х переменных: область определения, график, линии уровня, поверхности уровня. Предел и непрерывность функции двух переменных

1. Дана функция $f(x;y)=\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$. Найдите: $f(-4;2)$, $f\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{8}\right)$, $f\left(\dfrac{1}{x};\dfrac{1}{y}\right)$, $f(-x;-y)$, $f(y;x)$, $\dfrac{1}{f(x;y)}$.

2. Найдите и изобразите на плоскости области определения следующих функций:

1) $z=\sqrt{1+\sqrt{-(x+y)^2}}$, 2) $z=x+\arccos y$, 3) $z=\sqrt{x^2-4}+\sqrt{4-y^2}$.

3. Изобразите на плоскости линии уровня функции $z=x^2-y^2$.

4. Изобразите в пространстве поверхности уровня функции $u=x^2+y^2+z^2$.

5. Найдите пределы следующих функций или покажите, что они не существуют.

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x-y^2\right)\cdot\sin\dfrac{1}{x+y}\cdot\cos\dfrac{x}{x-y}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{2\cdot(x-1)\cdot(y-2)}{(x-1)^2+(y-2)^2}$; 3) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -1}}\dfrac{\operatorname{tg}(x+y)\cdot e^{x-y}}{x^2-y^2}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin x\left(y^2+2y-4\right)}{x\left(y^2+2\right)}$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$, 6) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

7) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)\cdot\sin^3\dfrac{1}{xy}$, 8) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to -2}}\dfrac{(x-1)^5(y+2)}{(x-1)^2+(y+2)^2}$.

6. Исследовать на непрерывность функцию $f(x;y)=\begin{cases}(x+y)\cdot\arccos\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x;y)\neq(0;0),\\ 0, & (x;y)=(0;0)\end{cases}$ в точке $O(0;0)$.

7. Функция $f(x;y)=\dfrac{(x-1)(y-1)^2}{(x-1)(y-1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2}$ не определена в точке $M_0(1;1)$. Можно ли в этой точке функцию определить так, чтобы она стала непрерывной?

Работа в парах: нахождение области определения функций.

Практическое занятие 2. Частные производные функции. Полный дифференциал функции и его геометрический смысл

1. Найдите частные и полное приращения функции $z=3x^2+xy-y^2+1$ в точке $M_0(2;1)$ и при данных приращениях аргументов: $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$.

2. Найдите частные и полное приращения функции $z=\lg\left(x^2+y^2\right)$ в точке $M_0(2;1)$ при переходе от точки $M_0(2;1)$ к точке $M_1(2{,}1;\,0{,}9)$.

3. Найдите частные производные и полный дифференциал следующих функций:

1) $z=e^{x^2+y^2}$; 2) $u=t^5\sin^3 z$; 3) $f(x;y;z)=x^y+(xy)^z+z^{xy}$; 4) $v=\dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}$.

4. Вычислите приближенно значения:

1) $1{,}04^{2{,}03}$; 2) $\sqrt{(1{,}04)^2+(3{,}01)^2}$; 3) $\sin 28^\circ\cdot\cos 61^\circ$.

Работа в парах: нахождение частных производных функций.

Практическое занятие 3. Дифференцирование сложной и неявно заданной функций. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1. Найдите производную $\dfrac{dz}{dt}$, если 1) $z=x^2+y^2+xy$, $x=2\sin t$, $y=3\cos t$;

2) $z=\cos\left(2t+4x^2-y\right)$, $x=\dfrac{1}{t}$, $y=\dfrac{\sqrt{t}}{\ln t}$;   3) $z=x^2y^3u$, $x=t$, $y=t^2$, $u=\sin t$.

2. Найдите частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ и полный дифференциал dz, если

1) $z=x^3+y^3$, где $x=uv$, $y=\dfrac{u}{v}$;   2) $z=\sqrt{x^2-y^2}$, где $x=u^v$, $y=u\ln v$;

3) $z=\operatorname{arctg} xy$, где $x=\sqrt{u^2+v^2}$, $y=u-v$.

3. Найдите производную $y'(x)$ неявно заданной функции:

1) $xe^{2y}-y\ln x=8$;   2) $\ln\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

4. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой, заданной неявно уравнением $F(x;y)=0$ в точке $M_0(x_0;y_0)$:

1) $x^3y-y^3x=6$, $M_0(2;1)$;   2) $x^2y^2-x^4-y^4+13=0$, $M_0(2;1)$.

5. Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+4y^2+9z^2=14$ в точке $P_0(1;1;-1)$.

6. К поверхности $x^2+2y^2+3z^2=21$ проведите касательные плоскости, параллельные плоскости $x+4y+6z=0$.

Работа в парах: решение задач.

Практическое занятие 4. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

1. Найдите дифференциалы dz и d^2z для следующих функций:

1) $z=\sin x\cdot\sin y$,   2) $z=4x^3+3x^2y+3xy^2-y^3$,   3) $z=\ln(\operatorname{tg}(x+y))$.

2. Найдите производную функции $z=x^2-y^2$ в точке $M(1;1)$ в направлении, составляющем с осью *Ox* угол 60°. Определить направление максимального роста функции в точке *M*.

3. Даны: функция $z=\dfrac{x}{y}$, точка $A(1;1)$ и вектор $\vec{a}=(4;-3)$. Найдите: 1) $\overline{grad}z(A)$, 2) $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}(A)$

4. Найдите производную функции $z=1-\left(\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{64}\right)$ в точке $B(-2;6)$ в направлении к точке $C(0;8)$.

5. Найдите направление максимального роста функции $z=x^4+y^4-4x^2y^2$ в точке $A(2;1)$. Найдите наибольшее из значений производных по разным направлениям в точке *A*.

Работа в парах: решение задач.

Практическое занятие 5. Экстремум функции двух переменных. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на компакте

1. Найти экстремум функции $z=xy^2(1-x-y)$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

а) $z=x^2-xy+y^2-4x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x=0$, $y=0$, $2x+3y-12=0$;

б) $z=xy+y+x$ в квадрате, ограниченном прямыми $x=1$, $x=2$, $y=2$, $y=3$.

3. Дана система, состоящая из 6 точек, координаты, которых указаны в таблице

X	-1	0	1	2	3	4

Y	0	2	3	3,5	3	4,5

Требуется построить прямую с уравнением $y = ax + b$ так, чтобы она отличалась как можно меньше от данной системы точек в смысле наименьших квадратов.

4. Из всех прямоугольников с заданной площадью найти такой, периметр, которого имеет наименьшее значение.

Работа по группам: решение задач с докладом у доски.

Практическое занятие 6. Контрольная работа «Дифференцирование функций нескольких действительных переменных»

Индивидуальная работа студента с отчетом преподавателю

0 вариант

1. Найти полный дифференциал функции $f(x;y) = \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}$.

2. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin\dfrac{y}{x}$ в точке $(1, \pi, 0)$.

3. Найти производную неявно заданной функции $e^y + ax^2e^{-y} - 2bx = 0$.

4. Найти производную функции $z = x^4 + 3x^3y + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3$ в точке $A(1,1)$ по направлению вектора $\vec{a} = (1,1)$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = 1 + x + 2y$ на компакте $K = \{(x;y): x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

6. Исследовать условный экстремум функции $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при условии связи $x + y = 2a$, $a > 0$.

Литература

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для ст-тов пед. Вузов / И.И. Баврин. – М.: Высш. Шк., 2006. – 326 с.

2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС21век. Изд-во «Мир и образование», 2005. – 415 с.

3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель, 2006. – 558 с.

4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2019. – 608 с.

5. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.2. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 800 с.

Тема 2. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Практическое занятие 1, 2. Двойной интеграл

1. Интегрируема ли функция $f(x;y) = 1 - \dfrac{y^2}{x^2}$ в замкнутом круге $B = \{(x;y): x^2 + y^2 \le \pi^2\}$.

2. Пусть функция $f(x;y)$ интегрируема на компакте Φ. Записать двойной интеграл $\iint\limits_{\Phi} f(x;y)\,dxdy$ в виде повторных с разным порядком интегрирования, где

а) Φ – «правый» замкнутый полукруг с центром в точке $O(0,0)$ и радиуса $r = 2$;

б) Φ – квадрируемый компакт, ограниченный осью абсцисс, биссектрисой первого координатного угла и параболой с вершиной в точке $A(1,1)$ и проходящей через начало координат.

3. Изменить порядок интегрирования: а) $\int\limits_{-6}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x;y)dy$, б) $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{0}^{\ln x} f(x;y)dy$.

4. Вычислить двойные интегралы, сводя их к повторному:

а) $I = \iint\limits_{\Phi} xydxdy$, где Φ – квадрируемый компакт, являющийся замкнутым квадратом с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$.

Б) $I = \iint\limits_{D} (x^2 + y^2)dx\,dy$, если замкнутая область D ограничена линиями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

В) $I = \iint\limits_{D} e^{x+\sin y} \cdot \cos y\,dx\,dy$, если D – прямоугольник $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$.

Г) $I = \iint\limits_{D} (3x^2 - 2xy + y)dx\,dy$, если область D ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

Д) $I = \iint\limits_{\Phi} (x + y^2)dxdy$, где $\Phi = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \le y \le x\}$.

Е) $\iint\limits_{\Phi} \sqrt{x+y}\,dxdy$, где Φ – замкнутый треугольник с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.1. 5. Переходя к полярным координатам, вычислите двойные интегралы:

1) $\iint\limits_{\Phi} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$, где $\Phi = \{(x;y): 4x \le x^2 + y^2 \le 8x, \quad x \le y \le 2x\}$;

2) $\iint\limits_{\Phi} (x^2 - y^2)dxdy$, где $\Phi = \{(x;y): x^2 + y^2 - 2x \le 0\}$.

6. Заменяя переменные, вычислите двойные интегралы:

1) $I = \iint\limits_{D} (x+y)^3 (x-y)^2\,dx\,dy$, если D – квадрат, ограниченный прямыми $x + y = 1$, $x - y = \pm 1$, $x + y = 3$;

2) $I = \iint\limits_{D} dx\,dy$, если область D ограничена линиями $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 3x$;

3) $I = \iint\limits_{\Phi} (x^2 - y^2)^2 (x+y)dxdy$, где $\Phi = \{(x;y): 1 \le x + y \le 3, \quad |x-y| \le 1\}$;

4) $\iint\limits_{\Phi} \frac{dxdy}{y}$, где $\Phi = \left\{(x;y)\, x \le y \le 2x, \quad \frac{2-x}{2} \le y \le 2\cdot(2-x)\right\}$;

5) $\iint\limits_{\Phi} \left(\frac{y}{x}\right)^3 dxdy$, где $\Phi = \{(x;y): 1 \le xy \le 2, \quad x \le y^2 \le 2x\}$.

Работа по группам: вычисление двойных интегралов разными способами.

Практическое занятие 3. Тройной интеграл

1. Различными способами расставьте пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} dy \int\limits_{0}^{x+y} f(x,y,z)dz.$$

2. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_T \left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz$, где T – прямоугольный параллелепипед, заданный неравенствами $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 3$.

3. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_T dx\,dy\,dz$, где T – шар $x^2+y^2+z^2 \le 9$.

4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

а) $x^2+y^2=8$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=4$; б) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=x^2+y^2$.

Работа по группам: вычисление тройных интегралов разными способами.

Практическое занятие 4. Криволинейный интеграл I и II рода

1. Вычислите криволинейные интегралы I рода:

1) $\int\limits_C \left(x^2+y^3\right)dl$, где C – контур треугольника с вершинами $A(1;0)$, $B(0;1)$, $O(0;0)$;

2) $\int\limits_C x\cdot y\,dl$, где C – контур квадрата $|x|+|y|=2$;

3) $\int\limits_L y\,dl$, где L – дуга циклоиды $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$;

4) $\int\limits_C \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)dl$, где C – дуга астроиды $\begin{cases} x=\cos^3 t, \\ y=\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$;

5) $\int\limits_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где γ – окружность $x^2+y^2=16$.

2. Вычислите длину дуги кривой $x=3t$, $y=3t^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(3;3)$.

3. Вычислите криволинейные интегралы II рода:

а) $\int\limits_{AB} \left(x^2-2xy\right)dx+\left(2xy+y^2\right)dy$, где AB – дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4)$;

б) $\int\limits_C (2-y)dx+x\,dy$, где C – дуга первой арки циклоиды $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$, пробегаемая в направлении возрастания параметра;

в) $\int\limits_\Gamma \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, где Γ – окружность $x^2+y^2=25$, пробегаемая против часовой стрелки.

4. Вычислите $I=\int\limits_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} (x+y)dx+(x-y)dy$ по различным контурам, соединяющим точки $O(0,0)$ и $M(\pi,\pi)$

1) по прямой OM, 2) по кривой $y=x+\sin x$, 3) по ломанной OPM, $P(\pi,0)$, 4) по параболе $y=\frac{x^2}{\pi}$.

5. Вычислите $I=\int\limits_K y\,dx+2x\,dy$, где K пробегаемый против часовой стрелки контур ромба, стороны которого лежат на прямых $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=\pm 1$, $\frac{x}{3}-\frac{y}{2}=\pm 1$.

6. Вычислите $\oint\limits_K xdy + ydx$ по замкнутым контурам: 1) по окружности $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$,
2) по контуру, ограниченному дугой параболы $y = x^2$ и отрезку прямой $y = 1$.
7. Вычислите $I = \int\limits_K ydx - \left(y + x^2\right)dy$, если K – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью Ox и пробегаемая по ходу часовой стрелки.
8. С помощью формулы Грина преобразуйте криволинейный интеграл $\oint\limits_C \left(x + \ln\left(x^2 + y^2\right)\right)dx + y\ln\left(x^2 + y^2\right)dy$, C – контур, ограничивающий область D. Вычислите этот интеграл, если $D = \left\{(x, y): x^2 + y^2 \le 1\right\}$.
9. Применяя формулу Грина, вычислите криволинейный интеграл $I = \oint\limits_C \left(-x^2 y\right)dx + xy^2\, dy$, где C – окружность $x^2 + y^2 = 64$, пробегаемая против часовой стрелки.
10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной
1) эллипсом $x = 3\cos t$, $y = \sin t$, 2) кардиоидой $x = 2\cos t - \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$.
Работа в парах: решение задач.

Практическое занятие 5. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции по её полному дифференциалу

1. Найдите первообразную функцию $U(x, y)$, если
1) $dU = \left(x^2 - 2xy^2 + 3\right)dx + \left(y^2 - 2x^2 y + 3\right)dy$; 2) $du = e^{x-y}\left(\left(1 + x + y\right)dx + \left(1 - x - y\right)dy\right)$.
2. Найдя первообразные функции, вычислите интеграл $\int\limits_{(1;1)}^{(3;1)} \frac{(x + 2y)dx + y\,dy}{(x + y)^2}$ (по путь, не пересекающему прямой $y = -x$).
3. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ от выражения, являющегося полным дифференциалом по пути, не пересекающему оси абсцисс.

Литература

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для ст-тов пед. Вузов / И.И. Баврин. – М.: Высш. Шк., 2006. – 326 с.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС21век. Изд-во «Мир и образование», 2005. – 415 с.
3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель, 2006. – 558 с.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2019. – 608 с.

6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
ПК-2	Домашнее задание	Низкий (неудовлетворительно)	Студент не выполнил домашнее задание или нет ни одной задачи, которую он решил правильно.
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент правильно решил и корректно обосновал ответ в 50 % задач, другие задачи не решены или решены с логическими ошибками, ошибками, свидетельствующими о незнании теоретического материала по теме.
		Базовый (хорошо)	Студент правильно решил и корректно обосновал ответ в 80 % задач, другие задачи не решены или решены ошибками.
		Высокий (отлично)	Студент правильно решил и грамотно обосновал ответы в задачах, предложенных для домашнего рассмотрения.
ПК-2	Контрольная работа	Низкий (неудовлетворительно)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений менее 60 %
		Пороговый (удовлетворительно)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений от 61-75 %
		Базовый (хорошо)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений от 76-84 %
		Высокий (отлично)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений от 85-100 %

6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

Критерии оценивания устного ответа на зачете

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если:

- вопросы раскрыты, изложены логично, без существенных ошибок, показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, продемонстрировано усвоение ранее изученных вопросов, сформированность компетенций, устойчивость используемых умений и навыков. Допускаются незначительные ошибки.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если:

- не раскрыто основное содержание учебного материала; обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов; не сформированы компетенции, умения и навыки.

6.3 Оценочные средства для проверки уровня сформированности компетенции ПК-2

Тест содержит следующие типы заданий

Тип задания	№ задания	Вес задания (балл)	Результат оценивания (баллы, полученные за выполнение задания / характеристика правильности ответа)
задания закрытого типа с выбором одного правильного (1 из 4)	1, 2, 3, 5	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором одного правильного ответа по схеме: «верно»/ «неверно»	4	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором нескольких правильных ответов (3 из 6)	6, 7	2 балла	2 б – полное правильное соответствие (последовательность вариантов ответа может быть любой); 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задания закрытого типа на установление соответствия (4 на 4)	8, 9	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задание закрытого типа на установление последовательности	10, 11	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задания открытого типа с кратким ответом	12, 13,	3 балла	3 б – полное правильное соответствие; 0 б – остальные случаи.
задания открытого типа с развернутым ответом	14, 15	5 баллов	5 б – полное правильное соответствие; если допущена одна ошибка/неточность / ответ правильный, но не полный - 3 балла; если допущено более одной ошибки / ответ неправильный / ответ отсутствует – 0 баллов

Формируемая компетенция	Индикаторы сформированности компетенции
ПК-2. Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования	**ПК-2.1** Знает концептуальные и теоретические основы профильных предметов, их место в системе наук и ценностей, историю развития и современное состояние. **ПК-2.2** Владеет основными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов.

Задание 1. Прочитайте текст задачи: «Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\sin\frac{y}{x}$ в точке $(1,\pi,0)$». Вспомнив теоретический материал, отметьте правильно записанное уравнение касательной плоскости к поверхности.

1) $z=z_0+\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0)$,

2) $z=z_0-\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)-\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0)$,

3) $\frac{x-x_0}{z'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$,

4) $z=z_0+z'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Ответ: 1.

Задание 2. Прочитайте текст задачи: «Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=\sin\frac{y}{x}$ в точке $(1,\pi,0)$». Вспомнив теоретический материал, отметьте правильно записанное уравнение нормали к поверхности.

1) $z=z_0+\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)+\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0)$,

2) $z=z_0-\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0)-\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0)$,

3) $\frac{x-x_0}{z'_x(x_0;y_0)}=\frac{y-y_0}{z'_y(x_0;y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}$,

4) $z=z_0-\frac{1}{z'(x_0)}\cdot(x-x_0)$.

Ответ: 3.

Задание 3. Прочитав условие задачи «Найдите производную функции $z=x^4+3x^3y+9x^2y-8xy^2+5y^3$ в точке $A(1,1)$ по направлению вектора $\vec{a}=(1,1)$», отметьте правильную формулу для нахождения производной по направлению.

1) $\frac{\partial z}{\partial l}(x_0;y_0)=\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\cdot\sin\alpha+\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}\cdot\sin\beta$, где $\sin\alpha$, $\sin\beta$ - направляющие косинусы прямой *l*,

2) $\frac{\partial z}{\partial l}(x_0;y_0)=\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}\cdot\cos\beta$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ - направляющие косинусы прямой *l*,

3) $\frac{\partial z}{\partial l}(x_0;y_0)=\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}+\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}$,

4) $\frac{\partial z}{\partial l}(x_0;y_0)=\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\cdot\cos\alpha-\frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}\cdot\cos\beta$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ - направляющие косинусы прямой *l*,

Ответ: 2.

Задание 4. Прочитайте алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум:

1) найдите область определения $D(f)$ функции $z=f(x;y)$,

2) найдите частные производные функции двух переменных $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$,

3) найдите частные производные второго порядка функции двух переменных $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$,

4) приравняв частные производные функции двух переменных к нулю, составьте и решите систему уравнений: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases}$

5) проверьте достаточные условия существования экстремума функции двух переменных в точках подозрительных на экстремум,
6) запишите ответ.
Верно ли сформулирован алгоритм?
Ответ: верно.

Задание 5. В чём заключается условие независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования?
1) функции $P(x;y)$, $Q(x;y)$ - непрерывны в области *D*,
2) выполняется равенство: $P(x;y)=Q(x;y)$ в каждой точке области *D*,
3) функции $P(x;y)$, $Q(x;y)$ - интегрируемы в области *D*,
4) в каждой точке области *D* выполняется равенство: $\frac{\partial P(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x;y)}{\partial x}$.

Ответ: 4.

Задание 6. Отметьте способы вычисления двойного интеграла:

1) $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b f(x;y(x))\cdot\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$,

2) $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(x(u;v);y(u;v))\cdot|I|\,du\,dv$, I – якобиан преобразования, G – образ области D в новых координатах,

3) $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x;y)\,dy$, где функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ - непрерывны на отрезке $[a;b]$,

4) $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t))\cdot x'(t)\,dt$,

5) $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)\,dx$, где функции $x_1(y)$, $x_2(y)$ - непрерывны на отрезке $[c;d]$,

6) $\iint\limits_D f(x;y)\,dx\,dy = \int\limits_\alpha^\beta f(x(\varphi);y(\varphi))\cdot\sqrt{(x'(\varphi))^2+(y'(\varphi))^2}\,d\varphi$.

Ответ: 2, 3, 5.

Задание 7. Отметьте формулы для вычисления криволинейного интеграла II рода

1) $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(P(x(t);y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t);y(t)) \cdot y'(t)\big)dt$, где $x(t),\ y(t),\ \alpha \le t \le \beta$ - параметризация гладкой кривой *AB*,

2) $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x;y)dx$, где функции $x_1(y),\ x_2(y)$ - непрерывны на отрезке $[c;d]$,

3) $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{a}^{b} P(x;y(x)) \cdot \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$, $y = y(x),\ a \le x \le b$ - задание гладкой кривой *AB*,

4) $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{a}^{b} \big(P(x;y(x)) + Q(x;y(x)) \cdot y'(x)\big)dx$, где $y = y(x),\ a \le x \le b$ - задание гладкой кривой *AB*,

5) $\int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Q(x(\varphi);y(\varphi)) \cdot \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}\,d\varphi$, где $x(\varphi),\ y(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta$ - параметризация гладкой кривой *AB*,

6) $\int\limits_{C} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x;y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x;y) \right) \cdot dx\,dy$, где *C* – кусочно гладкий контур в области *D*, функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ - непрерывны, дифференцируемы и имеют непрерывные частные производные в области *D*.

Ответ: 1, 4, 6.

Задание 8. Установите соответствие между функциями и областями определения функций:

А) $z = \sin\frac{x}{y}$	1) $D(z) = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 : y \ge -x\}$
Б) $z = \ln\frac{x}{y}$	2) $D(z) = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0,\ y > 0\} \cup$ $\cup \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 : x < 0,\ y < 0\}$
В) $z = \sqrt{x+y}$	3) $D(z) = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 : y \ne 0\}$
Г) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$	4) $D(z) = \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 : y \le x,\ y \ge -x\} \cup$ $\cup \{(x;y) \in \mathbf{R}^2 : y \le -x,\ y \ge x\}$

Ответ:

А	Б	В	Г
3	2	1	4

Задание 9. Установите соответствие:

А) наибольшее значение производной по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ равно …	1) $\frac{\partial z}{\partial l}(x_0;y_0) = \frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y} \cdot \cos\beta$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ - направляющие косинусы прямой *l*,
Б) значение производной по направлению вычисляется по формуле …	2) $-\left|\overrightarrow{grad}\ f(M_0)\right|$

В) производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ равна нулю при условии …	3) $\left\|\overrightarrow{grad}\ f(M_0)\right\|$
Г) наименьшее значение производной по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ равно …	4) угол между $\overrightarrow{grad}\ f(M_0)$ и прямой l равен 90°

Ответ:

А	Б	В	Г
3	1	4	2

Задание 10. Установите в правильной последовательности пункты алгоритма составления уравнения касательной плоскости к поверхности $z = f(x;y)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$:

1) подставить координаты точки $M_0(x_0;y_0)$ в частные производные первого порядка,

2) найти значение функции в точке $M_0(x_0;y_0)$,

3) составить уравнение касательной плоскости по формуле $z = f(x_0;y_0) + \frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0) + \frac{\partial z(x_0;y_0)}{\partial y}\cdot(y-y_0)$,

4) найти частные производные функции $z = f(x;y)$,

5) упростить уравнение касательной плоскости, приведя его к общему уравнению плоскости.

Ответ: 24135.

Задание 11. Установите последовательность в алгоритме нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $z = f(x;y)$ на компакте D:

1) найти частные производные функции $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$,

2) исследовать функцию на условный экстремум на границе компакта ∂D,

3) найти область определения функции $z = f(x;y)$,

4) приравняв частные производные функции к нулю, составьте и решите систему уравнений: $\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0,\end{cases}$ получив точки подозрительные на экстремум,

5) установить: содержится ли компакт D в области определения функции,

6) выбрать из значений функции в экстремальных точках и точках условного экстремума наибольшее и наименьшее значения функции на компакте.

7) если компакт D не содержится в области определения функции, то задача не имеет решения, если же компакт D содержится в области определения функции, то продолжить решение задачи,

8) найти значения функции в точках, подозрительных на экстремум.

Ответ: 35714826.

Задание 12. Вычислите двойной интеграл $I = \iint\limits_D dx\,dy$, если D – параллелограмм со сторонами, лежащими на прямых $y = x$, $y = x+3$, $y = 1-2x$, $y = 5-2x$. В ответ запишите число $3I$.

Ответ: 8.

Задание 13. Используя геометрический смысл полного дифференциала функции, вычислите приближённо значение $\ln\left((0{,}09)^3 + (0{,}99)^3\right)$.
Ответ: $-0{,}03$.

Задание 14. Найдите полный дифференциал функции $v(x;y) = x^2 - y^3$ в точке $M(1;-4)$.
Ответ: $dv(M) = 2dx - 48dy$, или $dv = 2dx - 48dy$, или $2dx - 48dy$.

Задание 15. Каким способом: через параметризацию кривой или по формуле Грина рациональнее вычислить криволинейный интеграл II рода: $I = \oint\limits_L (2x+3y)dx + (3x-4y)dy$, где кривая L состоит из дуги параболы $y = x^2$, соединяющей точки $O(0;0)$ и $A(2;4)$, и отрезка прямой, соединяющей эти же точки.
Ответ: по формуле Грина.

6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

Контрольная работа «Дифференцирование функций нескольких действительных переменных»

0 вариант

1. Найти полный дифференциал функции $f(x;y) = \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}$.

2. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin\dfrac{y}{x}$ в точке $(1, \pi, 0)$.

3. Найти производную неявно заданной функции $e^y + ax^2e^{-y} - 2bx = 0$.

4. Найти производную функции $z = x^4 + 3x^3y + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3$ в точке $A(1,1)$ по направлению вектора $\vec{a} = (1,1)$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = 1 + x + 2y$ на компакте $K = \{(x;y) : x + y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$.

6. Исследовать условный экстремум функции $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при условии связи $x + y = 2a$, $a > 0$.

Программа зачёта

I. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

1. Множества в пространствах $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$.
2. Понятие функции нескольких переменных. График функции двух переменных. Линии уровня. Поверхности уровня.
3. Предел функции 2-х и 3-х переменных, методы вычисления.
4. Непрерывность функции 2-х и 3-х переменных.
5. Частные производные функций нескольких переменных, их геометрический смысл.
6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
7. Дифференциал и дифференцируемость функции нескольких переменных; геометрический смысл полного дифференциала.
8. Дифференцируемость сложной функции, инвариантность формы записи полного дифференциала.
9. Дифференцирование неявно заданных функций.
10. Производная по направлению; градиент.
11. Производные и дифференциалы высших порядков.

12. Экстремум функции нескольких переменных.

II. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

1. Двойной интеграл, его геометрический смысл и свойства.
2. Необходимое и достаточное условия существования двойного интеграла.
3. Методы вычисления двойного интеграла (через повторный интеграл, замена переменных в двойном интеграле).
4. Тройной интеграл, его геометрический смысл и свойства.
5. Методы вычисления тройного интеграла (через повторный интеграл, замена переменных в двойном интеграле).
6. Криволинейные интегралы I рода, их свойства.
7. Методы вычисления криволинейного интеграла I рода.
8. Криволинейные интегралы II рода, их свойства.
9. Вычисление криволинейного интеграла II рода через определенный интеграл.
10. Формула Грина.
11. Восстановление функции по её полному дифференциалу.

7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Информационные технологии – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- Электронные библиотечные системы;
- Мультимедийное сопровождение лекций и практических занятий.

8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

9.1 Литература

1. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу: учебник для ст-тов вузов / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М.: Дрофа, 2003. – 638 с. (8 экз.)
2. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для ст-тов пед. вузов / И.И. Баврин. – М.: Высш. шк., 2006. – 326 с. (16 экз.)
3. Бугров, Я.С. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов, обучающихся по инженерно-технич. спец. В 3 т. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления. / Я.С. Бугров. – М.: Дрофа. – Высшее образование. – (Современный учебник), 2004. – 509 с. (31 экз.)

4. Бугров, Я.С. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов, обучающихся по инженерно-технич. спец. В 3 т. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. / Я.С. Бугров. – М.: Дрофа. – Высшее образование. – (Современный учебник), 2004. – 511 с. (32 экз.)

5. Вся высшая математика: учебник для ст-тов вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренков и др. Т.2. – М.: УРСС, 2004. – 187 с. (20 экз.)

6. Вся высшая математика: учебник для ст-тов вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренков и др. Т.3. – М.: УРСС, 2005. – 237 с. (2 экз.)

7. Вся высшая математика: учебник для ст-тов вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренков и др. Т.4. – М.: УРСС, 2001. – 348 с. (6 экз.)

8. Гаврилов, В.Р. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. / В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003. – 496 с. (10 экз.)

9. Гусак, А.А. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов. В 2 т. Т.1. / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 544 с. (8 экз.)

10. Гусак, А.А. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов. В 2 т. Т.2. / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 447 с. (8 экз.)

11. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС21век. Изд-во «Мир и образование», 2005.–415 с. (16 экз.)

12. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель, 2006. – 558 с. (50 экз.)

13. Ильин, В.А. Математический анализ: учеб. для вузов В 2 ч. Ч. 1. / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов; под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Наука, 1979. – 719 с. (12 экз.)

14. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник. В 2-х т. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. / Л.Д. Кудрявцев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 424 с. (54 экз.)

15. Лунгу, К.Н. Высшая математика руководство к решению задач: учеб. пособие для студ. вузов / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров; под ред. В.Д. Кулиева . - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 212 с. (15 экз.)

16. Никольский, С.М. Элементы математического анализа. / С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2002. – 272 с. (21 экз.)

17. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 608 с. (16 экз.)

18. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. – В 2-х ч. Ч.1. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.; М.; Краснодар: Изд-во «Лань», 2006. – 440 с. (17 экз.)

19. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. – В 2-х ч. Ч.2. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.; М.; Краснодар: Изд-во «Лань», 2006. – 463 с. (18 экз.)

20. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.1. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Изд-во «Лань», 1997. – 608 с. (4 экз.)

21. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.2. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Изд-во «Лань», 1997. – 800 с. (4 экз.)

22. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.3. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Изд-во «Лань», 1997. – 672 с. (4 экз.)

23. http://rucont.ru/efd/246490 Протасов Ю.М. Математический анализ. –М.: НАУКА. – 166 с.

24. http://rucont.ru/efd/193090 Основы математического анализа (модуль "Функции нескольких переменных"). - ГОУ ОГУ. – 111 с.

25. http://www.rucont.ru/efd/237396 Климов В.С. Многомерный математический анализ. Ч. I. – ЯрГУ. 126 с.

26. http://www.rucont.ru/efd/237397 Климов В.С. Многомерный математический анализ. Ч. II. – ЯрГУ. 125 с.

27. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова, В. А. Ильин; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 109 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08472-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/515327

9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». - Режим доступа: http://www.window.edu.ru/
2. Портал научной электронной библиотеки. - Режим доступа: http://elibrary.ru/defaultx.asp
3. Интернет-Университет Информационных Технологий. - Режим доступа: https://intuit.ru
4. Глобальная сеть дистанционного образования. – Режим доступа: http://www.cito.ru/gdenet .
5. Российский портал открытого образования. – Режим доступа: http://www.openet.ru/University.nsf/
6. Портал бесплатного дистанционного образования. – Режим доступа: www.anriintern.com
7. Открытый колледж. Математика - Режим доступа: https://mathematics.ru/.
8. Математические этюды. - Режим доступа: http://www.etudes.ru/.
9. Портал научной электронной библиотеки-Режим доступа: http://elibrary.ru/defaultx.asp.
10. Сайт МЦНМО. – Режим доступа: MCCME: Moscow Center for Continuous Mathematical Education

9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». - Режим доступа: https://urait.ru
2. Полпред (обзор СМИ). - Режим доступа: https://polpred.com/news

10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером(рами) с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, коммутатором для выхода в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами, учебно-наглядными пособиями (мультимедийные презентации).

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ, в лаборатории психолого-педагогических исследований и др.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Windows, Linux; офисные программы Microsoft office, Libreoffice, OpenOffice; Adobe Photoshop, Matlab, DrWeb antivirus и т.д.

Разработчик: Якшина А.С., кандидат физико-математических наук, доцент

11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2024/2025 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2024/2025 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «24» мая 2024 г.).

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2025/2026 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2025/2026 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «21» мая 2025 г.).