

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Щёкина Вера Витальевна
Должность: Ректор
Дата подписания: 31.01.2025 04:42:47
Уникальный программный ключ:
a2232a55157e946551a8999b119089af53989420420336ffbf573a474657789



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Благовещенский государственный педагогический университет»

ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА

Рабочая программа дисциплины

УТВЕРЖДАЮ

Декан

физико-математического факультета
ФГБОУ ВО «БГПУ»

Т.А. Меределина

«23» июня 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

**Направление подготовки
44.03.05 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
(с двумя профилями подготовки)**

**Профиль
«ИНФОРМАТИКА»**

**Профиль
«МАТЕМАТИКА»**

**Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ**

**Принята
на заседании кафедры физического и
математического образования
(протокол № 10 от «22» июня 2022 г.)**

Благовещенск 2022

СОДЕРЖАНИЕ

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА	3
2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ	4
3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)	5
4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....	5
5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ	6
6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА.....	12
7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ.....	15
8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ	15
9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ	15
10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА	17
11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ.....	18

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель дисциплины: овладение классическими методами математики, как общенаучными; формирование систематических знаний основных определений, теорем, теорий из курса математики, алгоритмов и методов решения математических задач и задач, связанных с математическим моделированием; научное обоснование теорем, предложений и методов математики; изучение роли и места дисциплины в системе математических и естественных наук; формирование умений описывать математическим языком реальные физические процессы при решении задач.

1.2 Место дисциплины в структуре ООП: Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» относится к дисциплинам предметного модуля по математике части, формируемой участниками образовательных отношений блока Б1 (Б1.В.01.06).

Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» органично продолжает изучение математики, расширяет и углубляет математические знания студентов, развивает их умения, навыки решать математические и физические задачи.

1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: УК-1, ПК-2:

- **УК-1.** Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач, **индикатором** достижения которой является:

- УК-1.2 Находит и критически анализирует информацию, необходимую для решения поставленной задачи.
- УК-1.3 Аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение.

- **ПК-2.** Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования; **индикатором** достижения которой является:

- ПК-2.1 Знает концептуальные и теоретические основы профильных предметов, их место в системе наук и ценностей, историю развития и современное состояние.
- ПК-2.2 Владеет основными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения. В результате изучения дисциплины студент должен

- **знать:**

- основные понятия, теоремы и методы теории функций нескольких переменных: понятия: функции 2-х, 3-х переменной, области определения, множества значений, графика функции 2-х переменных, линии уровня, поверхности уровня, предела функции, непрерывности функции в точке, частной производной первого и высших порядков, дифференциала первого и высших порядков, экстремума функции 2-х переменных, производной по направлению, градиента, экстремума функции 2-х переменных, двойного и тройного интегралов, криволинейных интегралов I и II рода; свойства предела функции и функций, непрерывных в точке; уравнение касательной плоскости и нормали, алгоритмы нахождения производных высших порядков; алгоритмы нахождения экстремума функций двух переменных, наибольшего и наименьшего значений функции на компакте; свойства двойного и тройного интегралов, криволинейных интегралов I и II рода, методы их вычисления; алгоритм восстановления функции с помощью полного дифференциала;

- **уметь:**

- находить и строить на чертеже область определения функции 2-х, 3-х переменных, вычислять пределы функции 2-х переменных, исследовать непрерывность функции 2-х переменных в точке,
- находить частные производные, дифференциалы,

- составлять уравнение касательной плоскости, нормали,
- исследовать экстремум функции 2-х переменных,
- находить наибольшее и наименьшее значения функции 2-х переменных на компакте,
- вычислять двойные, тройные, криволинейные интегралы,
- восстанавливать функцию с помощью криволинейного интеграла II рода;
- владеть: умениями
- находить область определения функции 2-х переменных, находить пределы функции 2-х переменных, применяя полярные координаты,
- находить частные производные,
- исследовать экстремум функции 2-х переменных,
- находить наибольшее и наименьшее значения на компакте,
- строить область интегрирования, вычислять повторные интегралы, двойные, криволинейные II рода.

1.5 Общая трудоемкость дисциплины «Дополнительные главы математического анализа» составляет 2 зачетные единицы (далее – ЗЕ) (72 часа):

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и практических занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 5
Общая трудоемкость	72	72
Аудиторные занятия	36	36
Лекции	14	14
Практические занятия	22	22
Самостоятельная работа	36	36
Вид итогового контроля	-	зачет

2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

2.1 Очная форма обучения

Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
1.	Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	36	8	12	16
2.	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	36	6	10	20
Зачет					
ИТОГО		72	14	22	36

Интерактивное обучение по дисциплине

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Практическое занятие	Работа в парах, по группам, индивидуальная работа студента с отчетом преподавателю	4,5
2.	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	Практическое занятие	Работа в парах, по группам	2
ИТОГО				6,5

3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

Тема 1. Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Понятие функций 2-х, 3-х переменных. График функции двух переменных. Предел и непрерывность функций 2-х, 3-х переменных. Частные производные функций нескольких переменных, из геометрический смысл. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Дифференциал и дифференцируемость функции нескольких переменных; геометрический смысл полного дифференциала. Дифференцируемость сложной функции, инвариантность формы записи полного дифференциала. Дифференцирование неявно заданных функций. Производная по направлению; градиент; производные и дифференциалы высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных.

Тема 2. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Двойной интеграл, его свойства, методы вычисления, применения в геометрии. Тройной интеграл, его свойства, методы вычисления, применения в геометрии. Криволинейные интегралы I и II рода, их свойства, методы вычисления, некоторые применения.

4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Данные рекомендации предназначены для студентов физико-математического факультета направления подготовки бакалавра «44.03.05 Педагогическое образование» профиль «Математика», профиль «Информатика».

Процесс обучения указанной дисциплине преследует следующие цели:

- ознакомить студентов с основными понятиями теории функций нескольких действительных переменных, методами решения задач, относящимися к этому разделу математического анализа,
- научно обосновать теоремы и предложения курса,
- в комплексе с другими математическими дисциплинами продолжить развитие математической культуры логических рассуждений и правильной устной и письменной математической речи.

В результате изучения дисциплины студент **должен иметь представление** о месте и роли теории функций нескольких переменных в математическом анализе, в истории науки, в современной математике, об использовании методов математического анализа в физике и других естественных науках; **должен знать** основные понятия, теоремы курса, виды моделей и способы их построения, предлагаемые этой дисциплиной, методы решения основных типов задач; **должен уметь** находить область определения функций 2-х и 3-

х переменных, строить её на чертеже, вычислять пределы функций нескольких переменных, дифференцировать, интегрировать функции нескольких переменных.

Теоретический материал курса представлен планом лекционных занятий с указанием вопросов, рассматриваемых на каждой лекции.

Учебно-методические материалы по подготовке практических занятий содержат планы проведения занятий с указанием последовательности рассматриваемых тем, задания для решения в группе и задания для самостоятельной работы.

В рабочей программе представлен примерный вариант контрольных и самостоятельных работ, которые позволяют проверить уровень усвоения изученного материала.

Рабочая программа содержит программу зачета, которая позволяет наиболее эффективно организовать подготовку к нему. При подготовке к занятиям и зачету студенты могут использовать литературу, приведенную в рабочей программе.

Подготовку к зачету наиболее рационально осуществлять путем повторения и систематизации курса с помощью кратких конспектов. При работе с теоретическим материалом студент должен уяснить наиболее важные идеи каждой темы, уметь пользоваться основными понятиями и утверждениями (знать их формулировки, демонстрировать их использование на примерах, понимать условия применения и т.д.). Как правило, каждая тема, изученная в рамках курса, содержит ряд основных задач, приемами и методами решения которых должен владеть студент.

Изучать материал рекомендуется по плану, представленному в плане лекций (см. выше). После изучения теоретических основ каждой темы рекомендуется выполнить задания из практического занятия.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
1.	Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Домашнее задание Контрольная работа Подготовка к зачёту	16
2.	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	Домашнее задание Подготовка к зачёту	20
ИТОГО			36

5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Тема 1. Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Практическое занятие 1. Функции 2-х, 3-х переменных: область определения, график, линии уровня, поверхности уровня. Предел и непрерывность функции двух переменных

1. Данна функция $f(x; y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$. Найдите: $f(-4; 2)$, $f\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$, $f\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$, $f(y; x)$, $\frac{1}{f(x; y)}$.

2. Найдите и изобразите на плоскости области определения следующих функций:

$$1) z = \sqrt{1 + \sqrt{-(x+y)^2}}, \quad 2) z = x + \arccos y, \quad 3) z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}.$$

3. Изобразите на плоскости линии уровня функции $z = x^2 - y^2$.

4. Изобразите в пространстве поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$.

5. Найдите пределы следующих функций или покажите, что они не существуют.

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x - y^2) \cdot \sin \frac{1}{x+y} \cdot \cos \frac{x}{x-y}; \quad 2) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (y-2)}{(x-1)^2 + (y-2)^2}; \quad 3) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{\operatorname{tg}(x+y) \cdot e^{x-y}}{x^2 - y^2};$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin x (y^2 + 2y - 4)}{x(y^2 + 2)}, \quad 5) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}, \quad 6) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2};$$

$$7) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \cdot \sin^3 \frac{1}{xy}, \quad 8) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -2}} \frac{(x-1)^5 (y+2)}{(x-1)^2 + (y+2)^2}.$$

6. Исследовать на непрерывность функцию $f(x; y) = \begin{cases} (x+y) \cdot \arccos \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x; y) \neq (0; 0), \\ 0, & (x; y) = (0; 0) \end{cases}$

в точке $O(0; 0)$.

7. Функция $f(x; y) = \frac{(x-1)(y-1)^2}{(x-1)(y-1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2}$ не определена в точке $M_0(1; 1)$. Можно

ли в этой точке функцию определить так, чтобы она стала непрерывной?

Работа в парах: нахождение области определения функций.

Практическое занятие 2. Частные производные функции. Полный дифференциал функции и его геометрический смысл

1. Найдите частные и полное приращения функции $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$ в точке $M_0(2; 1)$ и при данных приращениях аргументов: $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = 0,2$.

2. Найдите частные и полное приращения функции $z = \lg(x^2 + y^2)$ в точке $M_0(2; 1)$ при переходе от точки $M_0(2; 1)$ к точке $M_1(2,1; 0,9)$.

3. Найдите частные производные и полный дифференциал следующих функций:

$$1) z = e^{x^2+y^2}; \quad 2) u = t^5 \sin^3 z; \quad 3) f(x; y; z) = x^y + (xy)^z + z^{xy}; \quad 4) v = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

4. Вычислите приближенно значения:

$$1) 1,04^{2,03}; \quad 2) \sqrt{(1,04)^2 + (3,01)^2}; \quad 3) \sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ.$$

Работа в парах: нахождение частных производных функций.

Практическое занятие 3. Дифференцирование сложной и неявно заданной функций. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1. Найдите производную $\frac{dz}{dt}$, если $1) z = x^2 + y^2 + xy$, $x = 2\sin t$, $y = 3\cos t$;

2) $z = \cos(2t + 4x^2 - y)$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$; 3) $z = x^2 y^3 u$, $x = t$, $y = t^2$, $u = \sin t$.

2. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ и полный дифференциал dz , если

1) $z = x^3 + y^3$, где $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$; 2) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$, где $x = u^v$, $y = u \ln v$;

3) $z = \operatorname{arctg} xy$, где $x = \sqrt{u^2 + v^2}$, $y = u - v$.

3. Найдите производную $y'(x)$ неявно заданной функции:

1) $xe^{2y} - y \ln x = 8$; 2) $\ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

4. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой, заданной неявно уравнением $F(x; y) = 0$ в точке $M_0(x_0; y_0)$:

1) $x^3 y - y^3 x = 6$, $M_0(2; 1)$; 2) $x^2 y^2 - x^4 - y^4 + 13 = 0$, $M_0(2; 1)$.

5. Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$ в точке $P_0(1; 1; -1)$.

6. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ проведите касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

Работа в парах: решение задач.

Практическое занятие 4. Производная по направлению. Градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

1. Найдите дифференциалы dz и d^2z для следующих функций:

1) $z = \sin x \cdot \sin y$, 2) $z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$, 3) $z = \ln(\operatorname{tg}(x + y))$.

2. Найдите производную функции $z = x^2 - y^2$ в точке $M(1; 1)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол 60° . Определить направление максимального роста функции в точке M .

3. Даны: функция $z = \frac{x}{y}$, точка $A(1; 1)$ и вектор $\vec{a} = (4; -3)$. Найдите: 1) $\overline{\operatorname{grad}}z(A)$, 2)

$$\frac{\partial z}{\partial a}(A)$$

4. Найдите производную функции $z = 1 - \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} \right)$ в точке $B(-2; 6)$ в направлении к точке $C(0; 8)$.

5. Найдите направление максимального роста функции $z = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$ в точке $A(2; 1)$.

Найдите наибольшее из значений производных по разным направлениям в точке A .

Работа в парах: решение задач.

Практическое занятие 5. Экстремум функции двух переменных. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на компакте

1. Найти экстремум функции $z = xy^2(1 - x - y)$.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

a) $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной прямыми $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$;

6) $z = xy + y + x$ в квадрате, ограниченном прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

3. Даны система, состоящая из 6 точек, координаты, которых указаны в таблице

X	-1	0	1	2	3	4
Y	0	2	3	3,5	3	4,5

Требуется построить прямую с уравнением $y = ax + b$ так, чтобы она отличалась как можно меньше от данной системы точек в смысле наименьших квадратов.

4. Из всех прямоугольников с заданной площадью найти такой, периметр, которого имеет наименьшее значение.

Работа по группам: решение задач с докладом у доски.

Практическое занятие 6. Контрольная работа «Дифференцирование функций нескольких действительных переменных»

Индивидуальная работа студента с отчетом преподавателю

0 вариант

- Найти полный дифференциал функции $f(x; y) = \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}$.
- Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin \frac{y}{x}$ в точке $(1, \pi, 0)$.
- Найти производную неявно заданной функции $e^y + ax^2 e^{-y} - 2bx = 0$.
- Найти производную функции $z = x^4 + 3x^3y + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3$ в точке $A(1, 1)$ по направлению вектора $\vec{a} = (1, 1)$.
- Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = 1 + x + 2y$ на компакте $K = \{(x; y) : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
- Исследовать условный экстремум функции $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии связи $x + y = 2a$, $a > 0$.

Литература

- Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для ст-тов пед. Вузов / И.И. Баврин. – М.: Высш. Шк., 2006. – 326 с.
- Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС21век. Изд-во «Мир и образование», 2005. – 415 с.
- Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель, 2006. – 558 с.
- Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2019. – 608 с.
- Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.2. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 800 с.

Тема 2. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

Практическое занятие 1, 2. Двойной интеграл

- Интегрируема ли функция $f(x; y) = 1 - \frac{y^2}{x^2}$ в замкнутом круге $B = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$.
- Пусть функция $f(x; y)$ интегрируема на компакте Φ . Записать двойной интеграл $\iint_{\Phi} f(x; y) dx dy$ в виде повторных с разным порядком интегрирования, где

- а) Φ – «правый» замкнутый полукруг с центром в точке $O(0,0)$ и радиуса $r = 2$;
 б) Φ – квадрируемый компакт, ограниченный осью абсцисс, биссектрисой первого координатного угла и параболой с вершиной в точке $A(1,1)$ и проходящей через начало координат.

3. Изменить порядок интегрирования: а) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x; y) dy$, б) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x; y) dy$.

4. Вычислить двойные интегралы, сводя их к повторному:

а) $I = \iint_{\Phi} xy dxdy$, где Φ – квадрируемый компакт, являющийся замкнутым квадратом с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$.

Б) $I = \iint_D (x^2 + y^2) dxdy$, если замкнутая область D ограничена линиями $y = x$, $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

В) $I = \iint_D e^{x+\sin y} \cdot \cos y dxdy$, если D – прямоугольник $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Г) $I = \iint_D (3x^2 - 2xy + y) dxdy$, если область D ограничена линиями $x = 0$, $x = y^2$, $y = 2$.

Д) $I = \iint_{\Phi} (x + y^2) dxdy$, где $\Phi = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}$.

Е) $\iint_{\Phi} \sqrt{x+y} dxdy$, где Φ – замкнутый треугольник с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$.

Б) 5. Переходя к полярным координатам, вычислите двойные интегралы:

1) $\iint_{\Phi} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^2}$, где $\Phi = \{(x; y) : 4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x, x \leq y \leq 2x\}$;

2) $\iint_{\Phi} (x^2 - y^2) dxdy$, где $\Phi = \{(x; y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

6. Заменяя переменные, вычислите двойные интегралы:

1) $I = \iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 dxdy$, если D – квадрат, ограниченный прямыми $x+y=1$, $x-y=\pm 1$, $x+y=3$;

2) $I = \iint_D dx dy$, если область D ограничена линиями $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=3x$;

3) $I = \iint_{\Phi} (x^2 - y^2)^2 (x+y) dxdy$, где $\Phi = \{(x; y) : 1 \leq x+y \leq 3, |x-y| \leq 1\}$;

4) $\iint_{\Phi} \frac{dxdy}{y}$, где $\Phi = \{(x; y) : x \leq y \leq 2x, \frac{2-x}{2} \leq y \leq 2 \cdot (2-x)\}$;

5) $\iint_{\Phi} \left(\frac{y}{x}\right)^3 dxdy$, где $\Phi = \{(x; y) : 1 \leq xy \leq 2, x \leq y^2 \leq 2x\}$.

Работа по группам: вычисление двойных интегралов разными способами.

Практическое занятие 3. Тройной интеграл

1. Различными способами расставьте пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz.$$

2. Вычислите тройной интеграл $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, где T – прямоугольный параллелепипед, заданный неравенствами $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.
3. Вычислите тройной интеграл $\iiint_T dx dy dz$, где T – шар $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.
4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями
 а) $x^2 + y^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 4$; б) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 + y^2$.

Работа по группам: вычисление тройных интегралов разными способами.

Практическое занятие 4. Криволинейный интеграл I и II рода

1. Вычислите криволинейные интегралы I рода:

- 1) $\int_C (x^2 + y^3) dl$, где C – контур треугольника с вершинами $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $O(0; 0)$;
- 2) $\int_C x \cdot y dl$, где C – контур квадрата $|x| + |y| = 2$;
- 3) $\int_L y dl$, где L – дуга циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$;
- 4) $\int_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl$, где C – дуга астроиды $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$;
- 5) $\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl$, где γ – окружность $x^2 + y^2 = 16$.

2. Вычислите длину дуги кривой $x = 3t$, $y = 3t^2$ от точки $O(0; 0)$ до точки $A(3; 3)$.

3. Вычислите криволинейные интегралы II рода:

- а) $\int_{AB} (x^2 - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy$, где AB – дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1; 1)$ до точки $B(2; 4)$;
- б) $\int_C (2 - y) dx + x dy$, где C – дуга первой арки циклоиды $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$, пробегаемая в направлении возрастания параметра;
- в) $\int_{\Gamma} \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, где Γ – окружность $x^2 + y^2 = 25$, пробегаемая против часовой стрелки.

4. Вычислите $I = \int_{(0,0)}^{(\pi, \pi)} (x+y) dx + (x-y) dy$ по различным контурам, соединяющим точки $O(0,0)$ и $M(\pi, \pi)$

1) по прямой OM , 2) по кривой $y = x + \sin x$, 3) по ломанной OPM , $P(\pi, 0)$, 4) по параболе $y = \frac{x^2}{\pi}$.

5. Вычислите $I = \int_K y dx + 2x dy$, где K пробегаемый против часовой стрелки контур ромба,

стороны которого лежат на прямых $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1$, $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1$.

6. Вычислите $\oint_K xdy + ydx$ по замкнутым контурам: 1) по окружности $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$

$$0 \leq t \leq 2\pi,$$

2) по контуру, ограниченному дугой параболы $y = x^2$ и отрезку прямой $y = 1$.

7. Вычислите $I = \int_K ydx - (y + x^2)dy$, если K – дуга параболы $y = 2x - x^2$, расположенная над осью Ox и пробегаемая по ходу часовой стрелки.

8. С помощью формулы Грина преобразуйте криволинейный интеграл $\oint_C (x + \ln(x^2 + y^2))dx + y \ln(x^2 + y^2)dy$, C – контур, ограничивающий область D . Вычислите этот интеграл, если $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

9. Применяя формулу Грина, вычислите криволинейный интеграл $I = \oint_C (-x^2 y)dx + xy^2 dy$,

где C – окружность $x^2 + y^2 = 64$, пробегаемая против часовой стрелки.

10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной

1) эллипсом $x = 3\cos t$, $y = \sin t$, 2) кардиоидой $x = 2\cos t - \cos 2t$,
 $y = 2\sin t - \sin 2t$.

Работа в парах: решение задач.

Практическое занятие 5. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции по её полному дифференциалу

1. Найдите первообразную функцию $U(x, y)$, если

1) $dU = (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$; 2)
 $du = e^{x-y}((1+x+y)dx + (1-x-y)dy)$.

2. Найдя первообразные функции, вычислите интеграл $\int_{(1;1)}^{(3;1)} \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$ (по пути, не пересекающему прямой $y = -x$).

3. Вычислите криволинейный интеграл $\int_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{ydx - xdy}{y^2}$ от выражения, являющегося полным дифференциалом по пути, не пересекающему оси абсцисс.

Литература

- Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для ст-тов пед. Вузов / И.И. Баврин. – М.: Высш. Шк., 2006. – 326 с.
- Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС21век. Изд-во «Мир и образование», 2005. – 415 с.
- Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель, 2006. – 558 с.
- Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2019. – 608 с.

6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
УК-1, ПК-2	Домашнее задание	Низкий (неудовлетворительно)	Студент не выполнил домашнее задание или нет ни одной задачи, которую он решил правильно.
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент правильно решил и корректно обосновал ответ в 50 % задач, другие задачи не решены или решены с логическими ошибками, ошибками, свидетельствующими о незнании теоретического материала по теме.
		Базовый (хорошо)	Студент правильно решил и корректно обосновал ответ в 80 % задач, другие задачи не решены или решены ошибками.
		Высокий (отлично)	Студент правильно решил и грамотно обосновал ответы в задачах, предложенных для домашнего рассмотрения.
УК-1, ПК-2	Контрольная работа	Низкий (неудовлетворительно)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений менее 60 %
		Пороговый (удовлетворительно)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений от 61-75 %
		Базовый (хорошо)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений от 76-84 %
		Высокий (отлично)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений от 85-100 %

6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

Критерии оценивания устного ответа на зачете

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если:

- вопросы раскрыты, изложены логично, без существенных ошибок, показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, продемонстрировано усвоение ранее изученных вопросов, сформированность компетенций, устойчивость используемых умений и навыков. Допускаются незначительные ошибки.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если:

- не раскрыто основное содержание учебного материала; обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов; не сформированы компетенции, умения и навыки.

6.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

Контрольная работа «Дифференцирование функций нескольких действительных переменных»

0 вариант

1. Найти полный дифференциал функции $f(x; y) = \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}$.
2. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sin \frac{y}{x}$ в точке $(1, \pi, 0)$.
3. Найти производную неявно заданной функции $e^y + ax^2 e^{-y} - 2bx = 0$.
4. Найти производную функции $z = x^4 + 3x^3 y + 9x^2 y - 8xy^2 + 5y^3$ в точке $A(1, 1)$ по направлению вектора $\vec{a} = (1, 1)$.
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = 1 + x + 2y$ на компакте $K = \{(x; y) : x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
6. Исследовать условный экстремум функции $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при условии связи $x + y = 2a$, $a > 0$.

Программа зачёта

I. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

1. Множества в пространствах \mathbf{R}^2 и \mathbf{R}^3 .
2. Понятие функции нескольких переменных. График функции двух переменных. Линии уровня. Поверхности уровня.
3. Предел функции 2-х и 3-х переменных, методы вычисления.
4. Непрерывность функции 2-х и 3-х переменных.
5. Частные производные функций нескольких переменных, их геометрический смысл.
6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
7. Дифференциал и дифференцируемость функции нескольких переменных; геометрический смысл полного дифференциала.
8. Дифференцируемость сложной функции, инвариантность формы записи полного дифференциала.
9. Дифференцирование неявно заданных функций.
10. Производная по направлению; градиент.
11. Производные и дифференциалы высших порядков.
12. Экстремум функции нескольких переменных.

II. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

1. Двойной интеграл, его геометрический смысл и свойства.
2. Необходимое и достаточное условия существования двойного интеграла.
3. Методы вычисления двойного интеграла (через повторный интеграл, замена переменных в двойном интеграле).
4. Тройной интеграл, его геометрический смысл и свойства.
5. Методы вычисления тройного интеграла (через повторный интеграл, замена переменных в двойном интеграле).
6. Криволинейные интегралы I рода, их свойства.
7. Методы вычисления криволинейного интеграла I рода.
8. Криволинейные интегралы II рода, их свойства.
9. Вычисление криволинейного интеграла II рода через определенный интеграл.
10. Формула Грина.
11. Восстановление функции по её полному дифференциальному.

7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Информационные технологии – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- Электронные библиотечные системы;
- Мультимедийное сопровождение лекций и практических занятий.

8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

9.1 Литература

1. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу: учебник для ст-тов вузов / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М.: Дрофа, 2003. – 638 с. (8 экз.)
2. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для ст-тов пед. вузов / И.И. Баврин. – М.: Высш. шк., 2006. – 326 с. (16 экз.)
3. Бугров, Я.С. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов, обучающихся по инженерно-технич. спец. В 3 т. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления. / Я.С. Бугров. – М.: Дрофа. – Высшее образование. – (Современный учебник), 2004. – 509 с. (31 экз.)
4. Бугров, Я.С. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов, обучающихся по инженерно-технич. спец. В 3 т. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. / Я.С. Бугров. – М.: Дрофа. – Высшее образование. – (Современный учебник), 2004. – 511 с. (32 экз.)
5. Вся высшая математика: учебник для ст-тов вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренков и др. Т.2. – М.: УРСС, 2004. – 187 с. (20 экз.)
6. Вся высшая математика: учебник для ст-тов вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренков и др. Т.3. – М.: УРСС, 2005. – 237 с. (2 экз.)
7. Вся высшая математика: учебник для ст-тов вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренков и др. Т.4. – М.: УРСС, 2001. – 348 с. (6 экз.)
8. Гавrilov, B.P. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. / B.P. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003. – 496 с. (10 экз.)
9. Гусак, А.А. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов. В 2 т. Т.1. / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 544 с. (8 экз.)

10. Гусак, А.А. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов. В 2 т. Т.2. / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 447 с. (8 экз.)
11. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС21век. Изд-во «Мир и образование», 2005.–415 с. (16 экз.)
12. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель, 2006. – 558 с. (50 экз.)
13. Ильин, В.А. Математический анализ: учеб. для вузов В 2 ч. Ч. 1. / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов; под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Наука, 1979. – 719 с. (12 экз.)
14. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник. В 2-х т. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. / Л.Д. Кудрявцев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 424 с. (54 экз.)
15. Лунгу, К.Н. Высшая математика руководство к решению задач: учеб. пособие для студ. вузов / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров; под ред. В.Д. Кулиева . - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 212 с. (15 экз.)
16. Никольский, С.М. Элементы математического анализа. / С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2002. – 272 с. (21 экз.)
17. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 608 с. (16 экз.)
18. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. – В 2-х ч. Ч.1. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.; М.; Краснодар: Изд-во «Лань», 2006. – 440 с. (17 экз.)
19. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. – В 2-х ч. Ч.2. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.; М.; Краснодар: Изд-во «Лань», 2006. – 463 с. (18 экз.)
20. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.1. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Изд-во «Лань», 1997. – 608 с. (4 экз.)
21. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.2. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Изд-во «Лань», 1997. – 800 с. (4 экз.)
22. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.3. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Изд-во «Лань», 1997. – 672 с. (4 экз.)
23. <http://rucont.ru/efd/246490> Протасов Ю.М. Математический анализ. – М.: НАУКА. – 166 с.
24. <http://rucont.ru/efd/193090> Основы математического анализа (модуль "Функции нескольких переменных"). - ГОУ ОГУ. – 111 с.
25. <http://www.rucont.ru/efd/237396> Климов В.С. Многомерный математический анализ. Ч. I. – ЯрГУ. 126 с.
26. <http://www.rucont.ru/efd/237397> Климов В.С. Многомерный математический анализ. Ч. II. – ЯрГУ. 125 с.
27. Математический анализ. вещественные числа и последовательности: учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова, В. А. Ильин; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 109 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08472-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515327>

9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». - Режим доступа: <http://www.window.edu.ru/>
2. Портал научной электронной библиотеки. - Режим доступа: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>
3. Интернет-Университет Информационных Технологий. - Режим доступа: <https://intuit.ru>

4. Глобальная сеть дистанционного образования. – Режим доступа: <http://www.cito.ru/gdenet>.
5. Российский портал открытого образования. – Режим доступа: <http://www.openet.ru/University.nsf/>
6. Портал бесплатного дистанционного образования. – Режим доступа: www.anriintern.com
7. Открытый колледж. Математика - Режим доступа: <https://mathematics.ru/>.
8. Математические этюды. - Режим доступа: <http://www.etudes.ru/>.
9. Портал научной электронной библиотеки-Режим доступа: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>.
10. Сайт МЦНМО. – Режим доступа: [MCCME: Moscow Center for Continuous Mathematical Education](#)

9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». - Режим доступа: <https://urait.ru>
2. Полпред (обзор СМИ). - Режим доступа: <https://polpred.com/news>

10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером(рами) с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, коммутатором для выхода в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами, учебно-наглядными пособиями (мультимедийные презентации).

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ, в лаборатории психолого-педагогических исследований и др.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Windows, Linux; офисные программы Microsoft office, Libreoffice, OpenOffice; Adobe Photoshop, Matlab, DrWeb antivirus и т.д.

Разработчик: Якшина А.С., кандидат физико-математических наук, доцент

11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2024/2025 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2024/2025 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «24» мая 2024 г.).

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 20__/20__ уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 20__/20__ уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № ____ от «____» ____ 20__ г.). В РПД внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 1	
№ страницы с изменением:	
Исключить:	Включить:
№ изменения: 2	
№ страницы с изменением:	
Исключить:	Включить: