


Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Щёкина Вера Витальевна  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 15.09.2024 10:49  
Уникальный программный идентификатор:  
a2232a55157e576557a8999b1190892a55398747042053d0b1375a454e17789

	<b>МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ</b>
	<b>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»</b>
	<b>ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА Рабочая программа дисциплины</b>

**УТВЕРЖДАЮ**

**декан факультета физико-математического образования и технологии  
ФГБОУ ВО БГПУ**



**Н.В. Слесаренко  
«03» сентября 2024 г.**

**Рабочая программа дисциплины  
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**Направление подготовки  
02.03.03 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ И  
АДМИНИСТРИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

**Профиль  
ТЕХНОЛОГИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

**Уровень высшего образования  
БАКАЛАВРИАТ**

**Принята на заседании кафедры  
физического и математического  
образования  
(протокол № 9 от «24» мая 2024 г.)**

**Благовещенск 2024**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА .....</b>	<b>3</b>
<b>2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ .....</b>	<b>4</b>
<b>3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ) .....</b>	<b>9</b>
<b>4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>11</b>
<b>5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....</b>	<b>14</b>
<b>6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА.....</b>	<b>45</b>
<b>7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ .....</b>	<b>62</b>
<b>В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ .....</b>	<b>62</b>
<b>8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ .....</b>	<b>63</b>
<b>9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ .....</b>	<b>63</b>
<b>10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА .....</b>	<b>64</b>
<b>11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ .....</b>	<b>65</b>

## 1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

**1.1 Цель дисциплины:** формирование систематических знаний в области математического анализа, о его месте и роли в системе математических наук, приложениях в естественных науках. Изучение предмета дает возможность получить базовую фундаментальную подготовку по избранному направлению подготовки.

**1.2 Место дисциплины в структуре ООП:** Дисциплина «Математический анализ» относится к дисциплинам обязательной части блока Б1 (Б1.О.15).

Для освоения дисциплины используются знания, умения и виды деятельности, сформированные в процессе изучения предметов «Математика», «Информатика» в общеобразовательной школе.

**1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: ОПК-1, ПК-1, ПК-2:**

- **ОПК-1.** Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности, **индикаторами** достижения которой является:

- ОПК-1.1 – **обладает** базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук;
- ОПК-1.2 – **умеет** использовать их в профессиональной деятельности;
- ОПК-1.3 – **имеет** навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.

- **ПК-1.** Способен демонстрировать базовые знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий, **индикаторами** достижения которой является:

ПК-1.1 – **обладает** базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естественных наук, программирования и информационных технологий.

- **ПК-2.** Способность проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности:

- ПК-2.1 – **знает** принципы построения научной работы, современные методы сбора и анализа полученного материала, способы аргументации. Владеет навыками научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языках;
- ПК-2.2 – **умеет** решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой;
- ПК-2.3 – **имеет** практический опыт выступлений и научной аргументации и профессиональной.

**1.4 Перечень планируемых результатов обучения.** В результате изучения дисциплины студент должен

- **знать:**

- основные понятия и методы математического анализа;

- **уметь:**

- применять математические методы при решении профессиональных задач повышенной сложности;
- решать типовые задачи по основным разделам курса, используя методы математического анализа;

- **владеть:**

- методами построения математической модели профессиональных задач и содержательной интерпретации полученных результатов.

**1.5 Общая трудоемкость дисциплины «Математический анализ»** составляет 14 зачетных единиц (далее – ЗЕ) (504 часов):

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и практических занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

#### 1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 1	Семестр 2	Семестр 3	Семестр 4
Общая трудоемкость	504	108	144	180	72
Аудиторные занятия	240	66	54	80	40
Лекции	98	30	22	32	14
Практические занятия	142	36	32	48	26
Самостоятельная работа, написание курсовой работы	192	42	54	64	32
Вид контроля, экзамен	72		36	36	защита курсовой работы
Вид итогового контроля		Зачёт	Экзамен	Экзамен	Зачёт

## 2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

### 2.1 Очная форма обучения

#### Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоя- тельная работа, написание курсовой работы
			Лекции	Практические занятия	
1 семестр					
	Раздел I. Введение в анализ.	58	18	20	20
1.	Действительные числа.	6	2	2	2
2.	Функции.	12	4	4	4
3.	Предел.	30	10	10	10
4.	Непрерывность функции.	10	2	4	4
	Раздел II. Дифференциаль- ное исчисление для функ- ций одной переменной.	50	12	16	22
1.	Производная и дифферен- циал.	24	6	8	10
2.	Основные теоремы диффе- ренциального исчисления и их приложения.	26	6	8	12

	<b>Зачет</b>				
	<b>Итого 1 семестр</b>	<b>108</b>	<b>30</b>	<b>36</b>	<b>42</b>
<b>2 семестр</b>					
	<b>Раздел III. Ряды</b>	<b>44</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>22</b>
1.	Числовые ряды.	22	4	4	14
2.	Функциональные ряды.	22	6	8	8
	<b>Раздел IV. Интегральное исчисление для функций одной переменной.</b>	<b>64</b>	<b>12</b>	<b>20</b>	<b>32</b>
1.	Неопределенный интеграл.	28	8	10	10
2.	Определенный интеграл.	16	2	4	10
3.	Приложения определенного интеграла.	20	2	6	12
	<b>Экзамен</b>	<b>36</b>			
	<b>Итого 2 семестр</b>	<b>144</b>	<b>22</b>	<b>32</b>	<b>54</b>
<b>3 семестр</b>					
	<b>Раздел V. Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных.</b>	<b>44</b>	<b>10</b>	<b>12</b>	<b>22</b>
1.	Функции нескольких переменных.	16	4	4	8
2.	Дифференцируемые функции.	16	4	4	8
3.	Экстремумы функции нескольких переменных.	12	2	4	6
	<b>Раздел VI. Интегральное исчисление для функций нескольких переменных.</b>	<b>56</b>	<b>12</b>	<b>20</b>	<b>24</b>
1.	Двойные и тройные интегралы.	22	4	10	8
2.	Некоторые применения кратных интегралов.	16	4	4	8
3.	Криволинейные интегралы.	18	4	6	8
	<b>Раздел VII. Дифференциальные уравнения.</b>	<b>44</b>	<b>10</b>	<b>16</b>	<b>18</b>
1.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	16	4	6	6
2.	Дифференциальные уравнения высших порядков	28	6	10	12
	<b>Экзамен</b>	<b>36</b>			

<b>Итого 3 семестр</b>		<b>180</b>	<b>32</b>	<b>48</b>	<b>64</b>
<b>4 семестр</b>					
	<b>Раздел VIII. Элементы теории функций комплексной переменной.</b>				
1.	Комплексные числа.	8	2	4	2
2.	Функции комплексной переменной.	12	2	4	6
3.	Основные элементарные функции	10	2	4	4
4.	Дифференцирование функций комплексной переменной.	12	2	4	6
5.	Интегрирование функций комплексной переменной	12	2	4	6
6.	Ряды в комплексной плоскости.	18	4	6	8
	Зачет				
	Защита курсовой работы				
<b>Итого 4 семестр</b>		<b>72</b>	<b>14</b>	<b>26</b>	<b>32</b>
<b>ИТОГО</b>		<b>504</b>	<b>98</b>	<b>132</b>	<b>192</b>

### Интерактивное обучение по дисциплине

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
<b>1 семестр</b>				
1.	Действительные числа.	пр	Групповая работа: «Решение уравнений и неравенств с модулем».	2
2.	Функции.	л	Круглый стол: «Доказательство свойств функции».	2
3.	Предел.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Предел функции».	2
4.	Предел.	пр	Групповая работа: «Доказательство второго замечательного предела».	2
5.	Непрерывность функции.	пр	Работа в малых группах «Исследование функции на непрерывность».	2

6.	Производная и дифференциал функции.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Производная».	2
7.	Производная и дифференциал функции.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Производная сложной функции».	2
8.	Производная и дифференциал функции.	пр	Работа в малых группах: «Вычисление производной функции».	2
9.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Исследование функции с помощью производной».	2
10.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.	пр	Групповая работа: Тренинг 1 «Промежутки возрастания, убывания функции». Тренинг 2 «Промежутки выпуклости, вогнутости функции».	4
<b>Итого 1 семестр</b>				<b>22</b>
<b>2 семестр</b>				
1.	Числовые ряды.	пр	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Ряды».	4
2.	Функциональные ряды.	пр	Работа в малых группах: «разложение функции в степенной ряд. Приближенные вычисления с помощью рядов».	6
3.	Неопределенный интеграл.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Метод интегрирования по частям».	2
4.	Неопределенный интеграл.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Интегрирование дробно-рациональных функций».	4
5.	Приложения определенного интеграла.	л	Круглый стол: «Приложения определенного интеграла».	2
<b>Итого 2 семестр</b>				<b>18</b>

3 семестр				
1.	Функции нескольких переменных.	пр	Работа в малых группах: «Построение линий уровня»	2
2.	Двойные и тройные интегралы.	пр	Групповая работа: Вычисление двойных интегралов.	4
3.	Двойные и тройные интегралы.	пр	Групповая работа: Вычисление тройных интегралов.	4
4.	Некоторые применения кратных интегралов.	л	Круглый стол: «Приложения кратных интегралов».	4
5.	Криволинейные интегралы.	пр	Работа в малых группах: «Криволинейные интегралы 1 рода, 2 рода».	4
6.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка».	2
7.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	пр	Работа в малых группах: «Решение дифференциальных уравнений первого порядка методом изоклин».	2
13.	Дифференциальные уравнения высших порядков	л	Индивидуальная работа с применением интерактивного электронного обучающего ресурса Iskanderus eLearning: «Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и квазимногочленом в правой части».	4
<b>Итого 3 семестр</b>				<b>26</b>
4 семестр				
1.	Комплексные числа.	л	Круглый стол: «Действия с комплексными числами».	2
2.	Функции комплексной переменной.	пр	Работа в малых группах: «Функции комплексной переменной».	2
3.	Основные элементарные функции	л	Круглый стол: «Свойства элементарные функции комплексной переменной».	2
4.	Дифференцирование функций комплексной переменной.	пр	Работа в малых группах: «Восстановление функции по мнимой или действительной части».	2
5.	Интегрирование функций комплексной переменной	пр	Работа в малых группах: «Интегрирование функции комплексной переменной».	2
6.	Ряды в комплексной плоскости.	пр	Работа в малых группах: «Ряд Лорана».	2
<b>Итого 4 семестр</b>				<b>12</b>
<b>ИТОГО</b>				<b>78</b>

### 3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

#### РАЗДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

##### Тема 1. Действительные числа.

Множество действительных чисел. Геометрическое изображение действительных чисел. Непрерывность множества действительных чисел. Ограниченные, неограниченные множества. Промежутки. Супремум и инфимум множества, их существование.

##### Тема 2. Функции.

Отображения. Действительная функция действительной переменной. Некоторые типы поведения функции. Сложная функция. Обратная функция.

##### Тема 3. Предел.

Предел функции в точке. Свойства функции, имеющей предел в точке. Предел функции по множеству. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности и бесконечный предел. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности. Бесконечно малые функции и их свойства. Предел суммы, произведения, частного. Предельный переход в неравенствах. Предел сложной функции. Первый замечательный предел. Сравнение бесконечно малых функций. Второй замечательный предел.

##### Тема 2. Непрерывность функции.

Непрерывность функции в точке и на множестве. Арифметические операции над непрерывными функциями. Предельный переход под знаком непрерывной функции. Точки разрыва. Теоремы о промежуточном значении непрерывной функции. Ограниченность, достижение функцией наибольшего и наименьшего значений, непрерывность на отрезке. Элементарные функции.

#### РАЗДЕЛ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

##### Тема 1. Производная и дифференциал.

Дифференцируемость функции. Производная и дифференциал, их геометрический и механический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференцирование суммы, произведения, частного. Дифференцирование сложной функции. Производная обратной функции. Таблица производных. Производные высших порядков. Механический смысл второй производной. Дифференциалы высших порядков.

##### Тема 2. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.

Признаки постоянства, возрастания и убывания функции на промежутке. Максимум и минимум. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций.

#### РАЗДЕЛ III. РЯДЫ

##### Тема 1. Числовые ряды.

Числовой ряд. Сходящиеся ряды. Остаток сходящегося ряда. Необходимое условие сходимости. Сравнение рядов. Признаки Даламбера и Коши. Понятие знакопеременного ряда, абсолютная и условная сходимости. Теоремы об остатке ряда. Знакопеременные ряды. Теорема Лейбница. Абсолютная и условная сходимость.

##### Тема 2. Функциональные ряды.

Функциональный ряд. Область сходимости. Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости. Ряд Тейлора. Разложение элементарных функций в степенной ряд. Приближенные вычисления с помощью рядов.

#### РАЗДЕЛ IV. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

##### Тема 1. Неопределенный интеграл.

Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простейших иррациональных функций. Интегрирование тригонометрических функций.

**Тема 2. Определенный интеграл.**

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной.

**Тема 3. Приложения определенного интеграла.**

Вычисление площадей плоских фигур. Вычисление объема тела вращения. Вычисление длины гладкой дуги.

**РАЗДЕЛ V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.****Тема 1. Функции нескольких переменных.**

Понятие функции. График функции двух переменных. Предел и непрерывность.

**Тема 2. Дифференцируемые функции.**

Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал. Достаточные условия дифференцируемости. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

**Тема 3. Экстремумы функции нескольких переменных.**

Понятие максимума и минимума. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума для функции двух переменных.

**РАЗДЕЛ VI. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.****Тема 1. Двойной и тройной интегралы.**

Понятие двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла повторным интегрированием. Двойной интеграл в полярных координатах. Понятие тройного интеграла. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.

**Тема 2. Некоторые применения кратных интегралов.**

Геометрические и физические приложения кратных интегралов.

**Тема 3. Криволинейные интегралы.**

Криволинейный интеграл и его основные свойства. Вычисление криволинейных интегралов.

**РАЗДЕЛ VII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.****Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка.**

Основные понятия. Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка.

**Тема 2. Дифференциальные уравнения высших порядков.**

Уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

**РАЗДЕЛ VIII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.****Тема 1. Комплексные числа.**

Комплексные числа, операции над ними. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция. Множества на комплексной плоскости.

**Тема 2. Функции комплексной переменной.**

. Функция комплексной переменной. Предел и непрерывность функции комплексной переменной.

**Тема 3. Основные элементарные функции**

Основные элементарные функции комплексной переменной.

**Тема 4. Дифференцирование функций комплексной переменной**

Дифференцируемость функции комплексной переменной. Производная и дифференциал функции. Правила дифференцирования. Аналитические и гармонические функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

**Тема 5. Интегрирование функций комплексной переменной**

Интеграла от функции комплексной переменной, методы его вычисления.

**Тема 6. Ряды в комплексной плоскости.**

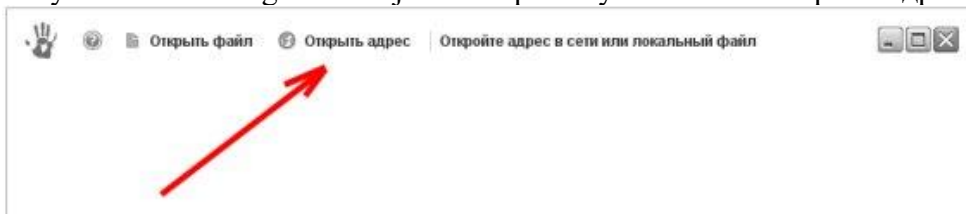
Ряды Тейлора и Лорана. Нули аналитической функции. Изолированные особые точки. Элементы теории вычетов.

#### 4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

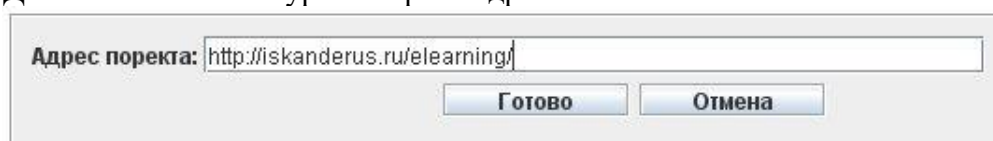
Данные рекомендации призваны помочь студентам в организации самостоятельной работы по освоению дисциплины. «Математический анализ» - одна из основных математических дисциплин, которая изучается студентами направления подготовки 02.03.03 – Математическое обеспечение и администрирование информационных систем на протяжении 4 семестров. Целью настоящего курса является научное обоснование относящихся к нему понятий, формирование умений и навыков решения различных типов задач. Дисциплина «Математический анализ» имеет также общеобразовательное и прикладное значение.

Использование информационных технологий в процессе обучения становится неотъемлемой частью самого процесса. Компьютерная технология может быть использована, как в качестве средства, так и участника данного процесса. При изучении некоторых тем курса математического анализа целесообразно воспользоваться электронными обучающими ресурсами системы Iskanderus eLearning (см. в таблице «интерактивное обучение по дисциплине»). Для работы с ресурсами необходимо:

1. Установить виртуальную машину Java.
2. Загрузить к себе на компьютер java-программу проигрывателя электронных курсов aLearningBrowser.jar.
3. Запустить aLearningBrowser.jar и выбрать пункт меню «открыть адрес»:



4. Дописать название курса в строке адреса:



Интерактивный обучающий курс, созданный в системе Iskanderus eLearning позволяет строить обучение, учитывающее индивидуальные особенности обучаемого, активно помогает учащимся сосредоточить внимание на наиболее важных аспектах изучаемого материала. Подбирает для каждого учащегося определенную скорость подачи информации, количество повторений и объяснений не понятных моментов, не торопит с решениями, дает возможность несколько раз ознакомиться с тем или иным материалом. Диалог с пользователем ведется интерактивном режиме, позволяющем выбирать содержание учебного материала и маршрут движения. Процесс взаимодействия между преподавателем и студентом, осуществляется опосредованно, в качестве интеллектуального посредника выступает интерактивный обучающий курс. Опыт использования интерактивных электронных ресурсов системы Iskanderus eLearning при изучении курса математического анализа показал, что материал, предлагаемый для изучения, доступен и понятен студентам, и может быть освоен ими самостоятельно.

В результате изучения курса студент должен овладеть основными понятиями математического анализа, уметь применять их при доказательстве важнейших свойств и теорем, приобрести навыки и умения, связанные с решением примеров и задач. Освоение курса математического анализа предполагает помимо посещения лекций и практических занятий выполнение домашних заданий. При этом особое внимание уделяется самостоятельной работе студентов. На практических занятиях должны быть выработаны соответствующие навыки и умения, связанные с решением примеров и задач.

В рабочей программе имеются примерные варианты контрольной и самостоятельных работ, которые позволят проверить уровень усвоения изученного материала.

Подготовку к зачету (экзамену) наиболее рационально осуществлять путем повторения и систематизации теоретического материала дисциплины с помощью кратких конспектов. При работе с теоретическим материалом студент должен уяснить наиболее важные идеи каждой темы, уметь пользоваться основными понятиями и утверждениями (знать их формулировки, демонстрировать их использование на примерах, понимать условия применения и т.д.). Как правило, каждая тема, изученная в рамках дисциплины, содержит ряд основных задач, приемами и методами решения, которых должен владеть студент. Рабочая программа содержит программы зачета и экзамена по дисциплине «Математический анализ», которые позволят наиболее эффективно организовать подготовку к ним. Предлагается при изучении дисциплины «Математический анализ» пользоваться материалами из «списка литературы и информационных ресурсов».

#### **Методические указания к выполнению курсовой работы**

Общими требованиями к изложению материала курсовой работы являются: целевая направленность; четкость построения; логическая последовательность изложения материала; глубина исследования и полнота освещения вопроса; убедительность аргументаций; конкретность и точность формулировок; конкретность изложения результатов работы; доказательность выводов и обоснованность рекомендаций. При этом студент должен самостоятельно, грамотно, доступно изложить знания, не допуская поверхностного и упрощенного толкования тех или иных вопросов темы. Дословное копирование прочитанной литературы не допускается. Однако это не исключает цитирование использованных источников с обязательной ссылкой на соответствующий источник

#### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

Студентов по дисциплине			
№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-темати- ческим планом
Раздел I. Введение в анализ.			
1.	Действительные числа.	Подготовка к практиче- ским занятиям. Выполнение домашних ра- бот.	2
2.	Функции.		4
3.	Предел.		10
4.	Непрерывность функции.		4
Раздел II. Дифференциальное исчисление для функций одной пе- ременной.			

1.	Производная и дифференциал.	Подготовка к практическим занятиям.	10
2.	Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения.	Выполнение домашних работ. Выполнение индивидуального задания.	12
<b>Раздел III. Ряды</b>			
1.	Числовые ряды.	Подготовка к практическим занятиям.	14
2.	Функциональные ряды.	Выполнение домашних работ. Выполнение индивидуального задания.	8
<b>Раздел IV. Интегральное исчисление для функций одной переменной.</b>			
1.	Неопределенный интеграл.	Подготовка к практическим занятиям.	10
2.	Определенный интеграл.	Выполнение домашних работ.	10
3.	Приложения определенного интеграла.	Выполнение индивидуального задания.	12
<b>Раздел V. Дифференциальное исчисление для функций нескольких переменных.</b>			
1.	Функции нескольких переменных.	Подготовка к практическим занятиям.	8
2.	Дифференцируемые функции.	Выполнение домашних работ.	8
3.	Экстремумы функции нескольких переменных.	Выполнение индивидуального задания.	6
<b>Раздел VI. Интегральное исчисление для функций нескольких переменных.</b>			
1.	Двойные и тройные интегралы.	Подготовка к практическим занятиям.	8
2.	Некоторые применения кратных интегралов.	Выполнение домашних работ.	8
3.	Криволинейные интегралы.	Выполнение индивидуального задания. Сбор материала для выполнения курсовой работы. Подготовка текста курсовой работы.	8
<b>Раздел VII. Дифференциальные уравнения.</b>			
1.	Дифференциальные уравнения первого порядка.	Подготовка к практическим занятиям.	6
2.	Дифференциальные уравнения высших порядков	Выполнение домашних работ. Выполнение индивидуального задания. Сбор материала для выполнения курсовой работы. Подготовка текста курсовой работы.	12

Раздел VIII. Элементы теории функций комплексной переменной.			
1.	Комплексные числа.	Подготовка к практическим занятиям. Выполнение домашних работ. Выполнение индивидуального задания. Сбор материала для выполнения курсовой работы. Подготовка текста курсовой работы.	2
2.	Функции комплексной переменной.		6
3.	Основные элементарные функции		4
4.	Дифференцирование функций комплексной переменной.		6
5.	Интегрирование функций комплексной переменной		6
6.	Ряды в комплексной плоскости.		8
	Итого		<b>192</b>

## 5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### РАЗДЕЛ I. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

#### Тема 1. Действительные числа

2 часа

#### Содержание

#### Практическое занятие

1. Запишите с помощью знака модуля следующие неравенства

$$\begin{array}{lll} \text{а) } -3 < x < 3; & \text{б) } -7 \leq x \leq 7; & \text{в) } -4 \leq x+1 \leq 4; \\ \text{г) } -5 < x < 3; & \text{д) } -3 \leq x \leq 5. \end{array}$$

2. Решите неравенства:

$$\text{а) } |x+3| \geq 2; \quad \text{б) } |x^2-5| > 2; \quad \text{в) } |x| < x+1; \quad \text{г) } |x^2-2x-3| > x^2-2x-3.$$

3. Решите уравнения:

$$\text{а) } |x-1|+|x+3|=6 \quad \text{б) } \frac{(|x-4|)^2-|x|-2}{x+2}=0 \quad \text{в) } x^2+2x=2|x+1|+7$$

4. Решите неравенства:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } 3|x-1| \leq x+3 & \text{б) } |x+1| < 3x-|x-2| & \text{в) } (2x+3)^2-|2x+3| \leq 30 \\ \text{г) } \frac{4}{|x|-1} \geq |x-1| \end{array}$$

5. Решите уравнения:

$$\text{а) } |2x+3|=x^2 \quad \text{б) } \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{x-1}{x+1}$$

6. Какие из числовых множеств рациональных чисел вида  $\frac{p}{q}$  ограничены снизу, сверху, ограничены. Найти **sup** и **inf** ограниченных множеств:

а)  $0 < p < q$

б)  $0 < q < p$

**Литература:**

1. Пушкина, Г.А. Действительные числа: методические рекомендации / Г.А.Пушкина, О.Н. Пушкина. – Благовещенск: Благовещенский гос. пед. ун-т. – 1998.- 30 с.

**Тема 2. Функции***4 часа***Содержание****Практическое занятие 1**

1. Является ли данная функция ограниченной снизу, сверху?

$y = x^2$

$y = -x^4$

$y = \sin x$

$y = 10 \cos x$

$y = x$

$y = \lg x$

$y = \operatorname{tg} x$

$y = \frac{1}{x}$

2. Найти область определения функции:

а)  $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$ ;

б)  $y = \arcsin(x+1)^3$ ;

в)  $y = \sqrt{1+x}$ ;

г)  $y = \sqrt[3]{1+x}$ ;

д)  $y = \frac{1}{4-x^2}$ ;

е)  $y = \sqrt[4]{9-x^2}$ ;

ж)  $y = \sqrt{2+x-x^2}$ ;

з)  $y = \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}$ ;

и)  $y = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ ;

3. Построить график функции, используя элементарные преобразования графиков:

$y = x^2 - 1$

$y = |x^2 - 1|$

$y = (x-2)^2$

$y = (|x| - 2)^2$

$y = -3 \sin x$

$y = x^2 - x - 2$

$y = \ln(-x)$

**Практическое занятие 2**

1. Исследуйте функцию на четность и нечетность.

$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$

$y = x^2 - 5x + 6$

$y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$

$y = x^2 - x + 1$

$y = \lg\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$y = \sqrt[4]{9-x^2}$

2. Для приведенной функции найдите наименьший положительный период  $T$ , если она периодическая.

$y = 5 \sin 3x$

$y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$

$y = \sin \sqrt{x}, D(x) = [0; +\infty)$

$y = 3 \sin 5x + 4 \cos 7x$

$y = \sin^2 x$

3. Построить графики функций:

$$y = \frac{|\sin x|}{\sin x} \qquad y = \frac{|2 + \sin x|}{2 + \sin x}$$

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{при } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{при } x = 0 \\ 2x - 1 & \text{при } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \cos x & \text{при } -\pi \leq x \leq 0 \\ 2 & \text{при } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{при } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

### Литература:

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс. - 2006. - 602 с.

### Тема 3. Предел

10 часов

### Содержание

#### Практическое занятие 1

Вычислить пределы:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$        | 2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^5 + 1}{x^2 - x - 2}$                       |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 7x - 15}$      | 4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^7 + 1}{x^2 - x - 2}$                       |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-3x} - \sqrt{1-2x}}{x + x^2}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}$               |
| 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$  | 9. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}$               |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3}$             | 11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{4 - x^2}$                       |
| 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3}}{x^2}$      | 13. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 5\sqrt{x} + 6}{x - 4}$                   |
| 14. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 4x + 3}$            | 15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 4x + 2)}{\ln(x^{10} + x^3 + x^2)}$ |
| 16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 4x} + x)$             |  |

#### Практическое занятие 2

1. Сравнить бесконечно малые величины  $\alpha = t \sin^2 t$  и  $\beta = 2t \sin t$  при  $t \rightarrow 0$ .
2. Сравнить бесконечно малые величины  $\alpha = t^2 \operatorname{tg} t$  и  $\beta = t^2 \sin^2 t$  при  $t \rightarrow 0$ .
3. Сравнить бесконечно малые величины  $\alpha = 5t^2 + 2t^5$  и  $\beta = 3t^2 + 2t^3$  при  $t \rightarrow 0$ .
4. Найти пределы функций

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$$

5. Найти пределы

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^3} - 1}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

### Практическое занятие 3

1. Для приведенных ниже последовательностей записать формулу общего члена последовательности.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \quad \sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$$

2. Последовательность  $\{y_n\}$  задана формулой общего члена последовательности  $\{y_n\}$   $= \frac{2n+1}{n+3}$ . Найти  $y_{10}, y_{n-1}, y_{n+1}$ .

3. Найти предел последовательности: 0,2; 0,23; 0,233; 0,2333; .... **Общий член последовательности можно записать:**  $y_n = 0,2 + [0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots]$

4. Найти предел последовательности:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$ .

5. Найти предел последовательности:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$ .

6. Найти предел последовательности:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$ .

7. Найти односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow 3-0} 5^{\frac{1}{x-3}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 3+0} 5^{\frac{1}{x-3}}$ .

8. Найти предел последовательности: 1,6; 1,66; 1,666; 1,6666; ....

9. Найти предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin n!}{n^2 + 1}$

### Практическое занятие 4

Вычислить пределы:

$$\begin{aligned}
& 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}; \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x}; \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x}; \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx}; \\
& 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x}; \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[4]{1+x^2} - 1\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{3}}{x}; \quad 7. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} x; \\
& 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) + \sin(a-x) - 2\sin a}{x^2}; \quad 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{x}; \\
& 10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^2}; \quad 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+x) + \cos(a-x) - 2\cos a}{1 - \cos x}; \quad 12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2}; \\
& 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}.
\end{aligned}$$

### Практическое занятие 5

$$\begin{aligned}
& 1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2}\right)^{4n^2} = e \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 6n - 1}{n^3 + 6n + 20}\right)^{n^2} = 1 \quad 3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - n - 1}{n^2 + 2}\right)^{n^2} = 0 \\
& 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x \quad 5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x \quad 6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^x \quad 7. \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln(2x+1) - \ln(x+2)) \\
& 8. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(x+1) - \ln x) \quad 9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \quad 10. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x \quad 11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2} \\
& 12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-3x)}{x}
\end{aligned}$$

### Литература:

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс. - 2006. - 602 с.
3. Насонова, Л.В. Избранные вопросы математического анализа. Предел и непрерывность. Часть 1,2: Методические рекомендации / Л.В. Насонова, И.В. Квасова, В.В. Попов. - Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2002.

## Тема 4. Непрерывность функции

4 часа

### Содержание

#### Практическое занятие

1. Исследовать на непрерывность функцию:

$$y = e^x \quad \text{в точке } x = 1$$

$$y = 4x^2 \quad \text{в точке } x = 2$$

2. Показать, что функция непрерывна для любого значения аргумента  $x$ :

$$y = x^3$$

$$y = \sin x$$

#### 3-7 Исследовать на непрерывность функцию:

$$\begin{aligned}
& 3. f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{если } 0 \leq x \leq 3 \\ 3-x, & \text{если } 3 < x \leq 4 \end{cases} \quad 4. y = \frac{x^2 - 25}{x - 5} \quad 5. y = \frac{1}{x^2} \quad 6. y = \frac{\sin x}{|x|} \quad 7. y = \frac{\sin x}{x}
\end{aligned}$$

8. Является ли функция  $f(x) = |\operatorname{sign} x|$  непрерывной в точке  $x = 0$ .

9. Исследовать на непрерывность  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ :

1

**10. Исследовать на непрерывность  $f(x) = [x]$ :**

11. Исследовать на непрерывность функцию  $f(x) = 5^{\frac{1}{3-x}}$ .

12. Определить приращение аргумента  $x$  и приращение функции  $y = \lg x$ , если аргумент  $x$  изменился от 10 до 100.

13. Показать, что для линейной функции  $y = ax + b$  приращение не зависит от  $x$ .

14. Доказать непрерывность функции  $y = \sqrt{x}$ .

15. Доказать, что функция  $y = |x|$  непрерывна.

**17-18. Определить точки разрыва функций:**

**16.**  $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

**17.**  $f(x) = \operatorname{tg}(2x + \frac{\pi}{4})$

**18.**  $f(x) = \frac{1}{\sin \pi x}$

### Литература:

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс. - 2006. - 602 с.
3. Насонова, Л.В. Избранные вопросы математического анализа. Предел и непрерывность. Часть 1,2: Методические рекомендации / Л.В. Насонова, И.В. Квасова, В.В. Попов. - Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2002.

## РАЗДЕЛ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### Тема 1. Производная и дифференциал

8 часов

### Содержание

#### Практическое занятие 1

1. Найти производную функции по определению:  $y = x^3$
2. Найти производную функции по определению:  $y = \sqrt{x}$
3. Найти производные функций:

$$y = x^5$$

$$y = \sqrt[7]{x^3}$$

$$y = \frac{1}{x^2}$$

$$y = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x^2}$$

$$y = ax^{-5}$$

$$y = \sqrt[n]{x}$$

$$y = \sqrt[3]{\sqrt{x}}$$

$$y = x^3 \sqrt{x}$$

$$y = \frac{tgx}{x}$$

$$y = ctgx \arccos x$$

$$y = \log_2 x \cdot 2^x$$

$$y = \frac{e^x}{\ln x}$$

4. Найти производные функций:

$$y = \sqrt{tgx}$$

$$y = \sqrt[3]{arctgx} - (\arcsin x)^3$$

$$y = \lg \sin x$$

$$y = arctg(\ln x) + \ln(arctgx)$$

$$y = (e^{5x} - ctg 4x)^5$$

$$y = \cos e^{3x}$$

$$y = arctg \sqrt{-x}$$

$$y = 2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$$

$$y = \ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$$

## Практическое занятие 2

1. Найти производную показательно- степенной функции:

$$1. y = (\sin x)^{\cos x}$$

$$2. y = \frac{\sin x^{\cos x} \sqrt[3]{\ln x^2}}{2^{tgx} \sqrt[4]{\arcsin x^3}}$$

1. Вычислить пределы:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cos x} - tgx \right)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{ctgx}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

## Практическое занятие 3

1. Найти уравнение касательной и нормали к кривой, заданной функцией в точке

$$1. y = x^3 - 2x^2 + 3, x_0 = 1$$

$$2. y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4x, x_0 = 2$$

$$3. x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6, M(-1,1)$$

$$4. \begin{cases} y = t^3 \\ x = t^2, t_0 = 2 \end{cases}$$

2. Найти угол пересечения двух кривыми, заданных функциями:

$$1. y = x^2, x + y = 2$$

$$2. y = x, y = x^3$$

3. Найти вторую производную функции: 1.  $y = x^5$  ; 2.  $y = (1 + x^2) arctgx$

4. Найти все производные порядка  $n$  функции : 1.  $y = x^n$  ; 2.  $y = \frac{1}{1+x}$

5. Удовлетворяет ли функция  $y = \frac{x^2 e^x}{2}$  соотношению  $y'' - 2y' + y = e^x$ .

## Практическое занятие 4

1. Найти дифференциал функции:

$$1. y = 10x + 15$$

$$2. y = \sqrt[3]{x^2}$$

$$3. y = \frac{3^x}{x^3}$$

$$4. y = x^2 \cos 3x$$

2. Приблизленно вычислить:

$$1. \sqrt[3]{70}$$

$$2. tg 46^\circ$$

$$\left( \frac{\pi}{180} \approx 0.01745 - 1 \text{ градус} \right)$$

$$3. \sqrt[5]{32,001}$$

## Тема 2. Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения

8 часов

### Содержание

#### Практическое занятие 1

1. Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{e^x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x \right)$
3.  $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax^m)^{\frac{b}{x^n}}, m > 0, n > 0$
5.  $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$
6.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x^{\sin x}$

2. Проверить справедливость теоремы Роля для функции для функции  $y = f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$  на отрезке  $[2, 3]$ .

3. Проверить справедливость теоремы Роля для функции для функции  $y = 4^{\sin x}$  на отрезке  $[0, \pi]$ .

4. Составить формулу Лагранжа для функции  $y = x(1 - \ln x)$  на отрезке от  $[a, b]$ .

#### Практическое занятие 2

##### Тренинг 1

*Пример выполнения упражнения тренинга.*

##### Задание

Исследовать функцию на возрастание, убывание, точки экстремума, если  $y = x^3 - 3x + 2$ .

Умение	Алгоритм					Конкретное соответствие заданию предложенному алгоритму					
	1) Найти область определения D(f)					1) D(f) = $(-\infty; +\infty)$					
	2) Найти $f'(x)$					2) $f'(x) = 3x^2 - 3$					
Исследовать функцию на возрастание(↗), убывание(↘)	3) Найти корни уравнения $f'(x) = 0: x_1, x_2, x_3$					3) $3x^2 - 3 = 0, \quad 3(x^2 - 1) = 0, \quad 3(x-1)(x+1) = 0$ $x_1 = -1; x_2 = 1$					
	4) Заполнить таблицу					4)					
	x	$x < x_1$	$x_1$	$x > x_1$	...	x	$-\infty; -1$	-1	-1; 1	1	$1; +\infty$
	y'	+	0	-	...	y'	+	0	-	0	+
	y	↗	max	↘	...	y	↗	max	↘	min	↗

	5) Найти $y(x_1), y(x_2), y(x_3)$	5) $y(-1)=4$ — <b>max</b> , $y(1)=0$ — <b>min</b>
	6) Записать ответ	6) $y \nearrow$ на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ $y \searrow$ на $(-1; 1)$ . $y$ в т. $x=-1$ имеет <b>max</b> $=y(-1)=4$ $y$ в т. $x=1$ имеет <b>min</b> $=y(1)=0$

### Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремум:

а)  $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$

б)  $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

в)  $y = \frac{x}{x^2 + 4}$

г)  $y = 3x + \frac{3}{x} + 5$

д)  $y = x \ln x$

### Тренинг 2

Пример выполнения упражнения тренинга.

#### Задание

Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба, если

$$y = x^3 + 15x^2 - x - 250$$

Умение	Алгоритм					Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму			
	1) Найти область определения $D(f)$					1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$			
	2) Найти $f''(x)$					2) $f'(x) = 3x^2 + 30x - 1$ $f''(x) = 6x + 30$			
Исследовать функцию на выпуклость ( $\cap$ ), вогнутость ( $\cup$ ), точки перегиба (тп)	3) Найти корни уравнения $f''(x) = 0$ : $x_1, x_2, \dots$					4) $6x + 30 = 0$ , $6(x + 5) = 0$ , $x = -5$			
	4) Заполнить таблицу					4)			
	x	$x < x_1$	$x_1$	$x > x_1$	...	x	$-\infty; -5$	-5	$-5; +\infty$
	$y''$	+	0	—	...	$y''$	-	0	+
	y	$\cup$	тп	$\cap$	...	y	$\cap$	тп	$\cup$
	5) Найти $y(x_1), y(x_2), \dots$					5) $y(-5) = 5$			
	6) Записать ответ					6) График функции выпуклый на $(-\infty; -5)$ вогнутый на $(-5; +\infty)$ точка $(-5; 5)$ - точка перегиба			

### Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремум:

а)  $y = x^5$

б)  $y = \sqrt[3]{x-1}$

в)  $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$

г)  $y = \frac{x}{x^2 + 16}$

д)  $y = e^{-\frac{x^2}{4}}$

е)  $y = \frac{x^2}{1-x^2}$

**Практическое занятие 3**

1. Найти наклонную асимптоту кривой  $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$
2. Исследовать поведение функции  $y = \frac{1}{x-2}$  и  $y = \frac{1}{(x-2)^2}$  в окрестности точки  $x_0 = 2$ .
3. Исследовать функцию построить график:
  1.  $y = x^2 - x^3$
  2.  $y = x(1 + \sqrt[4]{x})$
  3.  $y = 1 + \sqrt[4]{x}$
  4.  $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$
  5.  $y = x^3 e^x$
  6.  $y = x^3 - 4x + 2$
  7.  $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$
4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x^3 - 3x^2$  на отрезке  $[a, b]$ :
  1.  $a = -1, b = 1$ .
  2.  $a = -2, b = 4$
5. Дополнительные задания
  1.  $y = x^3 - 3x^2$
  2.  $y = x(1 + \sqrt{x})$
  3.  $y = 1 + \sqrt{x}$
  4.  $y = \sqrt[3]{x^2} - x$
  5.  $y = e^{\frac{1}{x}} - x$

**Тренинг 1***Пример выполнения упражнения тренинга.***Задание**

Исследовать функцию на возрастание, убывание, точки экстремума, если  
 $y = x^3 - 3x + 2$ .

Умение	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
	1) Найти область определения $D(f)$	1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$
	2) Найти $f'(x)$	2) $f'(x) = 3x^2 - 3$
Исследовать	3) Найти корни уравнения $f'(x) = 0$ : $x_1, x_2, x_3$	5) $3x^2 - 3 = 0$ , $3(x^2 - 1) = 0$ , $3(x-1)(x+1) = 0$ $x_1 = -1$ ; $x_2 = 1$

4) Заполнить таблицу					4)					
x	$x < x_1$	$x_1$	$x > x_1$	...	x	$-\infty; -1$	-1	-1; 1	1	$1; +\infty$
$y'$	$\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$	0	$\begin{matrix} - \\ + \end{matrix}$	...	$y'$	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$ $\searrow$	<b>max</b> <b>min</b>	$\searrow$ $\nearrow$	...	y	$\nearrow$	<b>max</b>	$\searrow$	<b>min</b>	$\nearrow$
5) Найти $y(x_1)$ , $y(x_2)$ , $y(x_3)$					5) $y(-1)=4$ — <b>max</b> , $y(1)=0$ — <b>min</b>					
6) Записать ответ					6) $y \nearrow$ на $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ $y \searrow$ на $(-1; 1)$ . $y$ в т. $x=-1$ имеет <b>max</b> $=y(-1)=4$ $y$ в т. $x=1$ имеет <b>min</b> $=y(1)=0$					

### Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремум:

а)  $y = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 1$

б)  $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

в)  $y = \frac{x}{x^2 + 4}$

г)  $y = 3x + \frac{3}{x} + 5$

д)  $y = x \ln x$

### Тренинг 2

Пример выполнения упражнения тренинга.

#### Задание

Исследовать функцию на выпуклость, вогнутость и точки перегиба, если  
 $y = x^3 + 15x^2 - x - 250$ .

Умение	Алгоритм					Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму				
	1) Найти область определения D(f)					1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$				
	2) Найти $f''(x)$					2) $f'(x) = 3x^2 + 30x - 1$ $f''(x) = 6x + 30$				
Исследовать функцию на выпуклость( $\cap$ ), вогнутость( $\cup$ ), точки перегиба (тп)	3) Найти корни уравнения $f''(x) = 0$ : $x_1, x_2, \dots$					6) $6x + 30 = 0$ , $6(x + 5) = 0$ , $x = -5$				
	4) Заполнить таблицу					4)				
	x	$x < x_1$	$x_1$	$x > x_1$	...	x	$-\infty; -5$	-5	-5; $+\infty$	
	$y''$	+	0	—	...	$y''$	-	0	+	
	y	$\cup$	тп	$\cap$	...	y	$\cap$	тп	$\cup$	
	5) Найти $y(x_1)$ , $y(x_2)$ , ...					5) $y(-5) = 5$				

	б) Записать ответ	б) График функции выпуклый на $(-\infty; -5)$ вогнутый на $(-5; +\infty)$ точка $(-5; 5)$ - точка перегиба
--	-------------------	---

### Задания для самостоятельной работы

Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремум:

а)  $y = x^5$

б)  $y = \sqrt[3]{x-1}$

в)  $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x$

г)  $y = \frac{x}{x^2 + 16}$

д)  $y = e^{-\frac{x^2}{4}}$

е)  $y = \frac{x^2}{1-x^2}$

### Литература:

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс. - 2006. - 602 с.

## Раздел III. Ряды

### Тема 1. Числовые ряды

4 часа

### Содержание

#### Практическое занятие 1

1. Дан общий член ряда  $u_n = \frac{2^{n-1}}{n!}$ . Записать первые четыре члена ряда.
2. Найти общий член ряда  $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots$
3. Найти общий член ряда  $1 + \frac{1 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9}{1 \cdot 4 \cdot 7} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10} + \dots$
4. Исследовать частичную сумму ряда  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$
5. Исследовать частичную сумму ряда  $2 + 6 + 18 + \dots + 2 \cdot 3^{n-1} + \dots$
6. Исследовать частичную сумму ряда  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$
7. Найти сумму ряда  $\frac{1}{1 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 23} + \frac{1}{23 \cdot 34} + \dots + \frac{1}{(11n-10)(11n+1)}$
8. Исследовать сходимость ряда и вычислить сумму ряда, если он сходится  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \dots$
9. Исследовать сходимость ряда  $u_n = \frac{5n+1}{4n-1}$

### Дополнительные задания

1. Найти общий член ряда  $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$
2. Найти общий член ряда  $\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^2 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \dots$
3. Найти сумму ряда  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$
4. Найти сумму ряда  $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$
5. Исследовать сходимость ряда и вычислить сумму ряда, если он сходится  
 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
6. Исследовать сходимость ряда  $u_n = \frac{n}{3n-1}$

### Практическое занятие 2

1. Исследовать сходимость знакопеременного ряда:

$$\text{а) } 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \dots \quad \text{б) } u_n = \frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$$

2. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$\text{а) } u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{5n+6} \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot n}{10n+9}$$

3. Сколько членов  $n$  ряда  $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  необходимо взять, чтобы вычислить ряд, причем

с точностью до 0,001?

4. Исследовать на сходимость ряд:

$$1. \quad \frac{1}{1 \cdot 2^2} - \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+1)^2} - \dots$$

$$2. \quad \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \dots$$

5. Оценить третий остаток ряда (двумя способами):

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \cdot 5^n} + \dots$$

7. Вычислить с точностью до 0,01 сумму ряда:

$$\frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} + \dots$$

### Дополнительные задания

1. Исследовать сходимость знакопеременного ряда  $u_n = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4} - \frac{1}{6^4} + \dots$
2. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$\text{а) } u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)} \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)}{(n^3+1)}$$

$$\text{в) } u_n = (-1)^n \left( \frac{3n+1}{2n+1} \right)^n$$

$$\text{ё) } u_n = (-1)^n \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \dots (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \dots (2n+5)} \quad \text{к) } u_n = (-1)^{n+1} \left( 1 + \frac{1}{10^n} \right)$$

$$\text{л) } u_n = \frac{(-1)^n n}{2^n}$$

3. Сколько членов ряда  $u_n = \frac{n}{(2n+1) \cdot 5^n}$  нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01?

4. Оценить второй остаток  $r_2$  ряда  $u_n = \frac{\cos 5n}{5^n + 1}$

## Тема 2. Функциональные ряды

8 часа

### Содержание

#### Практическое занятие 1

1. Определить область сходимости функционального ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+3)^n} \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} n \sqrt[3]{\cos^n x}$$

2. Определить радиус, интервал и область сходимости степенного ряда:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{4^n}$$

3. Исследовать сходимость функционального ряда:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+2} \left( \frac{5-x}{8x-3} \right)^n \quad \text{в точках } x=0, x=1.$$

4. Определить область сходимости ряда:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \sum_{n=0}^{\infty} x^n & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n \\ \text{г) } \sum_{n=0}^{\infty} (x-2)^n & \text{д) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^n} & \text{е) } \sum_{n=1}^{\infty} n! (x+5)^n \end{array}$$

### Дополнительные задания

1. Исследовать сходимость функционального ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{4-x}{7x+2} \right)^n$  в точках  $x=0, x=1$ .

2. Определить область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left( \frac{4-x}{7x+2} \right)^n$ .

3. Определить радиус, интервал и область сходимости степенного ряда:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n \cdot x)^n$

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$

### Практическое занятие 2

1. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$  (заменить  $e^x, \sin x$  их представлениями по формуле Маклорена и вычислить с точностью до величины  $O(x^3)$ ).
2. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x(1+x)^m}{x^2}$  (заменить  $(1+x)^m, \ln(1+x)$  их представлениями по формуле Маклорена).
3. Вычислить приближенное значение  $\sqrt[3]{e}$ , взяв три члена представления функции  $f(x) = e^x$  по формуле Маклорена, и оценить ошибку вычисления.
4. Вычислить приближенное значение  $\frac{1}{\sqrt[3]{e^x}}$ , взяв три члена представления функции  $f(x) = e^x$  по формуле Маклорена, и оценить ошибку вычисления.
5. Вычислить  $\sin 18^\circ$  с точностью до  $10^{-4}$  (подставить  $18^\circ = \frac{\pi}{10} = 0,314159$  вместо  $x$  в ряд).
6. Вычислить  $\sqrt[3]{70}$  с точностью до  $10^{-4}$ .
7. Вычислить  $\ln 5$  с точностью до  $10^{-3}$  (воспользоваться разложением  $\ln \frac{1+x}{1-x}$ , положив  $\frac{1+x}{1-x} = 5$ , откуда  $x = \frac{2}{3}$ ).

#### Дополнительные задания:

1. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^x - 1 - x}$
2. Вычислить приближенно  $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$  с точностью до  $10^{-4}$ .
3. Вычислить  $\sqrt[5]{250}$  с точностью до  $10^{-3}$ .
4. Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+x} - \sqrt[n]{1+x}}{x}$ .
5. Вычислить  $\cos 1^\circ$  с точностью до  $10^{-3}$ .
6. Вычислить  $\ln 6$  с точностью до  $10^{-4}$ .

#### Литература:

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс. - 2006. - 602 с.

3. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др. - 2-е изд., перераб.и доп. - М. : Физматлит. - Т.3: Интегралы, ряды. – 2003. - 502 с.

## РАЗДЕЛ IV. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### Тема 1. Неопределенный интеграл

10 часов

#### Содержание

#### Практическое занятие 1

Найти неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{2 + 3\sqrt{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} dx$	11. $\int tg^2 x dx$	<u><b>Метод замены:</b></u>
2. $\int \frac{x^2}{15 + x^2} dx \mid \pm 1$	12. $\int (x-1)^2 x \cdot \sqrt[4]{x} dx$	21. $\int \sin(3x+5) dx$
3. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2} = \mid \pm x^2 \mid$	13. $\int \frac{xe^x - x}{x} dx$	22. $\int e^{x^3} x^2 dx$
4. $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$	14.* $\int \frac{2 + 3x^2}{x^2(1+x^2)} dx$	<u><b>Метод по частям:</b></u>
5. $\int \frac{\cos^3 x - \sin x \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$	15. $\int a^x e^x dx$	23. $\int \frac{\ln x}{u} dx$
6. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$	16. $\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}$	24. $\int \frac{x}{u} \cdot e^{2x} dx$
7. $\int \sqrt{1 - \sin 2x} dx$	17. $\int \frac{2x \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx$	25. $\int \frac{\arctg x}{u} dx$
8. $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$	18. $\int \frac{x \sin 2x + \sqrt[3]{x} \cos x}{x \cos x} dx$	
9. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$	19. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$	
10. $\int (2^x + 3^x)^2 dx$	20. $\int \frac{x^2 + 5x + 6}{x+3} dx$	

#### Практическое занятие 2

Найти неопределенные интегралы:

- 1)  $\int \frac{dx}{x-5}$ ;    2)  $\int \frac{dx}{(x+2)^4}$ ;    3)  $\int \frac{xdx}{5x^2 + 2x + 4}$ ;    4)  $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$ .
- 5)  $\int \frac{x+3}{x^2 + 4x + 29} dx$ ;    6)  $\int \frac{7x-2}{3x^2 - 5x + 4} dx$ ;    7)  $\int \frac{5x-3}{x^2 + 6x - 40} dx$ .
- 8)  $\int \frac{x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 30x - 22}{x^3 - x^2 - 8x + 12} dx$ ;    9)  $\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$ .

$$\begin{aligned}
10) \int \frac{x^2 - 5x + 9}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 2)} dx; & \quad 11) \int \frac{2x + 2}{(x-1)(x^2 + 1)^2} dx; & \quad 12) \int \frac{dx}{(x^3 - 1)^2}; \\
13) \int \frac{8x^3 - 2x^2 + 13x - 2}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)} dx; & \quad 14) \int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2 + 2)^2} dx; \\
15) \int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx; & \quad 16) \int \frac{8x^3 - 12x^2 + 2x + 10}{(x+3)(x-1)^3} dx.
\end{aligned}$$

### Практическое занятие 3

1. Вычислить интеграл  $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}{(x+1)^3} dx$  (подстановка  $\frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)' = t$ ).
2. Вычислить интеграл  $\int \frac{dx}{(\sqrt{5 + 2x + x^2})^3}$  (подстановка  $\frac{1}{2}(ax^2 + bx + c)' = t$ ).
3. Вычислить интеграл  $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+2}} dx$  (интеграл вида  $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$  рационализируется подстановкой  $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ ).
4. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[4]{x+1}}$  (если подынтегральная функция является рациональной функцией относительно  $(\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{p}{q}}, (\frac{ax+b}{cx+d})^{\frac{r}{s}}$  и т.д., где  $p, q, s, r \dots$  - целые числа, то интеграл рационализируется подстановкой  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$ , где  $n$  - наименьшее кратное чисел  $q, s, \dots$ ).
5. Найти интеграл  $\int \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt{x-2}} dx$  (если подынтегральное выражение содержит лишь линейную иррациональность  $\sqrt[n]{ax+b}, a \neq 0$ , то полезна подстановка  $t = \sqrt[n]{ax+b}$ ).
6. Вычислить интеграл  $\int \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}} dx$ .
7. Найти интеграл  $\int \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}} dx$ .
8. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+2)}}$  (свести интеграл к типу  $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$ ).
9. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x + 7}}$ .
10. Найти интеграл  $\int \frac{(3x-7)}{\sqrt{5x^2 + 8x + 1}} dx$ .
11. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 3}}$  (замена  $x = \frac{1}{t}$ ).
12. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{7-x^2}}$ .

13. Найти интеграл  $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}.$

#### Практическое занятие 4

1. Вычислить интегралы: 1)  $I = \int \cos 3x \cos 9x dx$ ; 2)  $I = \int \sin 2x \cos 5x dx$ .
2. Вычислить интеграл:  $I = \int \sin 10x \cdot \cos 7x \cdot \cos 4x dx = \int \sin 10x [\cos 7x \cdot \cos 4x] \cdot dx$  (воспользоваться формулами дважды).
3. Найти интеграл  $I = \int \sin^2 x \cos^7 x dx$  (один показатель нечетное число: замена  $t = \sin x$  и понизить степень).
4. Найти интеграл  $I = \int \frac{\sin^7 x}{\sqrt{\cos x}} dx$  (замена переменной  $\cos x = t$ ).
5. Найти интеграл  $I = \int \cos^4 x dx$  (показатели четные положительные числа, один может равняться нулю: понизить степень  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ ,  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ ,  $\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$ ).
6. Найти интеграл  $I = \int \cos^2 3x \sin^4 x dx = \int [\cos 3x \sin 3x]^2 \sin^2 x dx$ .
7. Найти интеграл  $\int \operatorname{tg}^8 x dx$  (1 способ: использование формулы  $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$  и понижение показатель степени  $n$  на две единицы; 2 способ: использование подстановки:  $\operatorname{tg} x = t$ ,  $x = \operatorname{arctg} t$  и  $dx = \frac{dt}{1+t^2}$ .)
8. Найти интеграл  $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$ .
9.  $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$  (универсальная подстановка)
10. Найти интеграл  $\int \frac{5 + 6 \sin x}{\sin x (4 + 3 \cos x)} dx$  (универсальная подстановка)

## Тема 2. Определенный интеграл

4 часа

### Содержание

#### Практическое занятие

1. Составить формулу для вычисления интегральных сумм для функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a; b]$ , разделяя этот отрезок на  $n$  равных элементарных отрезков и взяв в качестве внутренней точки  $\xi_i$  правый конец каждого отрезка.
2. Вычислить интеграл  $\int_a^b x dx$  ( $a < b$ ), как предел интегральной суммы.
3. Составить формулу для вычисления интегральных сумм для функции  $f(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a; b]$ , разделяя этот отрезок на  $n$  равных элементарных отрезков и взяв в качестве внутренней точки  $\xi_i$  левый конец каждого отрезка.

4. Составить формулу для вычисления интегральных сумм для функции  $y = e^x$  на отрезке  $[a; b]$ , разделяя его на  $n$  равных отрезков и взяв в качестве внутренней точки  $\xi_i$  правый конец каждого отрезка.
5. Вычислить  $\int_a^b x dx$ , составив интегральную сумму для функции  $f(x) = x$ . Отрезок  $[a; b]$  разделить на  $n$  частей произвольным образом. В качестве внутренней точки  $\xi_i$  взять середину каждого частичного отрезка.
6. Найти  $I = \int_0^1 (x-2)^3 dx$ .      7. Найти  $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$ .      8. Найти  $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2-4}$ .
9.  $I = \int_1^9 \frac{\sqrt{x} dx}{x+2\sqrt{x}}$ .
10.  $I = \int_3^{10} \frac{dx}{(x-4)\sqrt{x+6}}$ .
11. Вычислить интеграл  $I = \int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2} dx$ .
12. Вычислить интеграл  $I = \int_0^1 x \cdot e^x dx$ .
13. Вычислить интеграл  $I = \int_0^1 x \cdot \arctg x dx$ .
14. Вычислить интеграл  $I = \int_0^1 \arcsin x dx$ .
15. Вычислить интеграл  $I = \int_0^\pi x \cdot \cos x dx$ .

### Тема 3. Приложения определенного интеграла 6 часа

#### Содержание

##### Практическое занятие

1. Найти площадь, ограниченную графиками функций  $y = 2\sqrt{x}$  и  $y = 2x$ .
2. Найти площадь, ограниченную эллипсом  $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$
3. Найти площадь одного лепестка четырехлепестковой розы  $r = a \sin 2\varphi$ .
4. Найти объем тела вращения, ограниченной линиями  $y = 2\sqrt{x}$  и  $y = 2x$  вокруг осей  $Ox$  и  $Oy$ .
5. Вычислить поверхность сферы, радиуса  $R$ , рассматривая ее как тело вращения.
6. Найти длину дуги кривой  $y = \ln x$  ( $x \in [1, \sqrt{3}]$ ).
7. Найти длину окружности радиуса  $R$ , заданной параметрическими уравнениями  $\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$
8. К телу прикреплен пружина, другой конец которой закреплен неподвижно в точке  $O$ . Упругая сила, с которой действует пружина на тело, подчиняется закону Гука,

согласно которому  $F = -kx$ , где  $k$  - коэффициент пропорциональности, а  $x$  - удлинение пружины. Найти работу упругой силы при прямолинейном перемещении по линии действия силы от  $x = a$  до  $x = b$ .

9. Вычислить интегралы: 1)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctg^2 x dx}{1+x^2}$ ; 2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{1+x^2}$ ; 3)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ; 4)  $\int_0^2 \frac{dx}{x-1}$ ; 5)  $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ ; 6)  $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ; 7)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$

### Литература:

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс. - 2006. - 602 с.
3. Якшина, А.С. Приложения определенного интеграла при решении геометрических и физических задач: Учебное пособие / А.С. Якшина. - Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2014.

## РАЗДЕЛ V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### Тема 1. Функции нескольких переменных

4 часа

### Содержание

#### Практическое занятие

1. Найти и изобразить на плоскости Оху область определения функции:

$$1) z = \frac{1}{\sqrt{\arcsin(1-x^2)}}; \quad 2) z = \frac{y-x}{x^2+y^2-4}; \quad 3) z = \frac{5}{3-x^2-y^2};$$

$$4) z = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+y^2-2y-2}}; \quad 5) z = \lg(x^2+6x+y^2+8); \quad 6) z = \sqrt{4-x^2-4y^2}.$$

2. Найти область определения данной функции трех переменных:

$$1) u = \sqrt{x^2+9y^2+18y+9-z}; \quad 2) \lg(4x^2+8x+y^2-2y+5-4z);$$

$$3) u = \frac{1}{\sqrt{2x-z-1}} - \frac{1}{\sqrt{y+2x+1}}.$$

3. Найти и построить линии уровня функции: 1)  $z = 4x^2 - \frac{y^2}{9}$ ; 2)  $z = x^2 + 6x + y^2 + 9$ ;

$$3) z = x^2 + 9y^2 + 18.$$

4. Найти предел функции: 1)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arctg 6(x^2+y^2)}{3(x^2+y^2)}$ ; 2)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2+y^2+4}-2}{x^2+y^2}.$

5. Найти все частные производные первого порядка функции: 1)  $z = \sqrt{x^2-3y^2}$ ;

$$2) z = \log_2(3\sqrt[3]{x} + 2y^2); \quad 3) u = \arccos \sqrt{y^2 - x^2 + 3z}; \quad 4) z = y \cdot x^y;$$

$$5) z = \frac{4}{\sqrt{5-xy}}; \quad 6) z = 2^{\cos \frac{t}{s}}; \quad 7) z = \arcsin \frac{y}{x}; \quad 8) z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad 9) z = y^x;$$

- 10)  $z = x^y$  ;      11)  $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}}$  ;      12)  $z = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$ .
6. Найти все частные производные второго порядка, предварительно найдя и упростив производные первого порядка: 1)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ; 2)  $z = \log_3(x - y^2)$ .
7. Найти точки разрыва функции  $z = \frac{1}{x - y + 1}$ .

## Тема 2. Дифференцируемые функции

4 часа

### Содержание

#### Практическое занятие

- Для функции найти полное приращение  $\Delta z$  и полный дифференциал  $dz$  для данной функции в точке  $M(x, y)$  для заданных  $\Delta x$  и  $\Delta y$  и сравните их.
  - $z = xy^2$ ;  $M(2, 1)$ ;  $\Delta x = 0, 2$ ;  $\Delta y = 0, 1$ .
  - $z = x^2 y$ ;  $M(1, 2)$ ;  $\Delta x = 0, 05$ ;  $\Delta y = 0, 1$ .
  - $z = x^2 y^2$ ;  $M(1, 1)$ ;  $\Delta x = 0, 01$ ;  $\Delta y = 0, 02$ .
- Найти полный дифференциал  $dz$  данной функции.
  - $z = x^3 y^2$  ;    2.  $z = xy^x$  ;    3.  $u = xyz$  ;    4.  $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$     5.  $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$
- Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядка функции.
  - $z = x^2 - 3xy - 2y^2$  ;    2.  $z = e^{xy}$     3.  $z = xe^y + ye^x$     4.  $z = e^y \sin x$
- Вычислить приближенно без использования калькулятора. При переводе градусов в радианы и при всех вычислениях брать три значащих цифры, в ответе последний знак округлить.
  - $1,01^2 \cdot 0,98^3$  ;    2.  $0,99^3 \cdot 1,02^2$  ;    3.  $\sqrt{3,98 + 2,95}$  ;    4.  $\sin 31^\circ \cdot \cos 61^\circ$ .
- Найти  $\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}$ , если: 1.  $z = \sqrt{3x - 5y}$ , где  $x = \sin t$ ,  $y = \sqrt{t}$  ;
- $z = \frac{y}{x}$ , где  $x = \ln t$ ,  $y = \arcsin t$
- Найти  $\frac{du}{dt}$ , если  $u = \frac{xy}{z}$ , где  $x = \sqrt{t + 2}$ ,  $y = e^t$ ,  $z = \cos t$ .

## Тема 3. Экстремумы функции нескольких переменных

4 часа

### Содержание

#### Практическое занятие

- Найти экстремумы функции  $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 3y$ .
- Исследовать на экстремум функции: 1.  $z = y^3 + 3x^2 y - 12x - 15y$  ; 2.  $z = 2x^2 + (y - 1)^2$ .
- Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $z = x^2 - xy + y^2 - 4y - x$  в области  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $3x + 2y - 12 \leq 0$ .
- Исследовать на экстремум функции: 1.  $z = x^2 + xy + y^2 - x - 2y$  ; 2.  $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$  ; 3.  $z = y^2 - 2x^2 - 2y + 1$ .

**Литература:**

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс. - 2006. - 602 с.
3. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов и др. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит. - Т.3: Функции нескольких переменных. - 2003. - 468 с.

**РАЗДЕЛ VI. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ****Тема 1. Двойной и тройной интегралы***10 часов***Содержание****Практическое занятие 1****1. Вычислить:**

$$1. \int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 3y^2) dy \quad 2. \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2}{y^2} dy \quad 3. \int_1^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} xy dy$$

**2. Найти и построить область интегрирования:**

$$1. \int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy \quad 2. \int_{-4}^3 dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy \quad 3. \int_{-2}^0 dy \int_{y^2-4}^0 f(x, y) dx$$

**3. Изменить порядок интегрирования в интеграле:**

$$1. \int_1^3 dx \int_{x^2}^{x+9} f(x, y) dy \quad 2. \int_{-4}^3 dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy \quad 3. \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$$

**4. Изменить порядок интегрирования:**

$$1. \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4x}} f(x, y) dy$$

$$2. \int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$$

**Практическое занятие 2****1. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования:**

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$$

**2. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования:**

$$\iint_S f(x, y) dx dy, \quad S: y \geq x, \quad y \geq -x, \quad y \leq 1.$$

**3. Вычислить  $\iint_S \ln(x^2 + y^2) ds$ , если области интегрирования  $S$  - кольцо между окружностями  $x^2 + y^2 = e^2$  и  $x^2 + y^2 = e^4$ .****4. Вычислить  $\iint_S r \sin \varphi dr d\varphi$ ,  $S: r \leq a, \varphi \geq \frac{\pi}{2}, \varphi \leq \pi$ .**

5. Вычислить  $\iint_S r \sin \varphi dr d\varphi$ ,  $S: r \geq 1, r \leq 2 + \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \pi$ .
6. Вычислить  $\iint_S r^2 dr d\varphi$ , если ограничена первым завитком спирали  $r = a\varphi$  и осью  $Ox$ .
7. Преобразовать к полярным координатам и вычислить  $\iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy$ ,  $S: x^2 + y^2 \leq a^2$ .

### Практическое занятие 3

1. Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{1-x-y}$ , если  $V$  - тетраэдр с вершинами  $O(0,0,0)$ ,  $A(1,0,0)$ ,  $B(0,1,0)$ ,  $C(0,0,1)$ .
2. Вычислить  $\iiint_V x^3 y^2 z dx dy dz$ , где  $V$  определяется неравенствами  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq x$ ,  $0 \leq z \leq xy$ . Примечание: Использовать метод параллельных сечений. В плоскости  $x=1$  получается треугольник с вершинами в точках  $A(1;0;0)$ ,  $B(1;1;0)$ ,  $C(1;1;1)$ , в плоскости  $y=x$  - криволинейный треугольник  $OBC$ , у которого стороны  $OB$  и  $BC$  - отрезки прямых, а сторона  $OC$  - параболы  $z=x^2$ . Участок поверхности  $AOC$  определяется уравнением  $z=xy$ .
3. Вычислить  $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2} dx dy dz$ ,  $V$  ограничена плоскостями  $y=0$ ,  $z=0$ ,  $z=2$  и цилиндром  $x^2+y^2=2x$ .
4. Вычислить  $\iiint_V (x^2+y^2+2z) dx dy dz$ ,  $V: x^2+y^2 \leq 1, z \geq 1-x^2-y^2, z \leq 1$ . Примечание: Область интегрирования расположена внутри цилиндра  $x^2+y^2 \leq 1$ , ниже плоскости  $z=1$  и выше параболоида вращения  $z=1-x^2-y^2$ , который пересекается с цилиндром  $x^2+y^2=1$  в плоскости  $XOY$  и имеет вершину на оси  $OZ$  в точке  $z=1$ .
5. Вычислить  $\iiint_V xyz dx dy dz$ , где  $V$  является  $\frac{1}{8}$  частью шара  $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ , расположенной в 1-ом октанте. Примечание: перейти к сферическим координатам.
6. Вычислить  $\iiint_V \sqrt{1+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} dx dy dz$ , где  $V$  шар  $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$ .

### Тема 2. Некоторые применения кратных интегралов

4 часа

#### Содержание

#### Практическое занятие

8. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:  $y=x^2$ ,  $y=1$ ,  $x+y+z=4$ ,  $2x+y+z=3$ . Примечание: Тело ограничено сбоку частью цилиндрической поверхности  $y=x^2$ , частью плоскости  $y=1$ , сверху частью плоскости  $z=4-x-y$ ,

снизу частью плоскости  $z_n = 3 - 2x - y$ . Проекция тела на плоскость  $XOY$  является область  $S$ , ограниченная прямой  $y = 1$  и параболой  $y = x^2$ .

9. Найти площадь  $S$ , ограниченную линиями  $y = e^x$ ,  $y = e^{-2x}$ ,  $y = e^2$ .
10. Найти объем части шара радиуса  $R$ , вырезанной из него прямым круговым цилиндром диаметром  $R$ , образующая которого проходит через центр шара. Примечание: Совместить начало координат с центром шара, ось  $Oz$  направить по образующей цилиндра, а ось  $Ox$  вдоль диаметра цилиндра. Вычисление целесообразно провести в полярных координатах.
11. Вычислить площадь части параболоида вращения  $z = x^2 + y^2$ , вырезаемую цилиндром  $x^2 + y^2 = 4$ .
12. Найти массу кругового кольца, если поверхностная плотность  $\gamma$  в каждой точке обратно пропорциональна квадрату расстояния ее от центра кольца.
13. Найти координаты центра тяжести пластины, ограниченной линиями  $y^2 = 4x + 4$ ,  $y^2 = -2x + 4$ . Поверхностная плотность  $\gamma$  постоянна.
14. Вычислить моменты инерции относительно осей координат пластины, определяемой условиями предыдущего примера.

### Тема 3. Криволинейные интегралы

6 часа

#### Содержание

#### Практическое занятие

1. Вычислить интеграл  $I = \int_L xy dx + (x + y) dy$ , принимая за линию  $L$ :
  - отрезок прямой, соединяющий точки  $O(0,0)$  и  $A(1,1)$
  - дугу параболы  $y = x^2$ , соединяющая эти же точки
  - ломаную  $OBA$ ,  $B(1,0)$ .
2. Вычислить интеграл  $I = \int_L xy dx$ , где  $L$  дуга параболы  $x = y^2$ , соединяющая точки  $A(1,-1)$  и  $B(1,1)$
3. Вычислить интеграл  $\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy dx + x^2 dy$
4. Вычислить интеграл  $\int_L y ds$ , где  $L$  - дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $O(0,0)$  до точки  $(4,16)$
5. Найти площадь  $Q$  боковой поверхности половины эллиптического цилиндра  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ , усеченного плоскостью  $z = y$ .
6. Найти площадь забора, построенного на периферии  $K$  квадрата  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , высота которого в точке  $(x, y) \in K$  равна  $z = x^2 + y^2$ .
7. Определить массу окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ , если ее плотность в точке  $(x, y)$  равна  $\rho = \frac{y^2}{R^2}$

8. Определить координаты центра масс  $C(x_0, y_0)$  однородной полуокружности  $K$ :  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $y \geq 0$ . Указание: Координаты центра масс однородной кривой  $K$  выражается формулами  $x_0 = \frac{1}{L_K} \int_K x ds$ ,  $y_0 = \frac{1}{L_K} \int_K y ds$ , где  $L$  - длина дуги кривой.
9. Найти момент инерции  $I_y$  дуги полукубической параболы  $y = x^{\frac{3}{2}}$  ( $0 \leq x \leq \frac{4}{3}$ ) относительно оси  $Oy$ . Указание:  $I_y = \int_K x^2 ds$ .
10. Найти момент инерции  $I_x$  арки циклоиды  $K$ :  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) относительно оси  $Ox$ . Указание:  $I_x = \int_K y^2 ds$ .
11. Найти работу силы с проекциями  $X = y$ ,  $Y = -x$  вдоль эллипса  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ).
12. Найти работу силы  $F = \{-kx, -ky\}$  при перемещении ее точки приложения из  $M_1(a, 0)$  в  $M_2(0, b)$ .
13. Найти работу силы с проекциями  $X = \sin(x + y)$ ,  $Y = 0$  вдоль контура треугольника с вершинами  $O(0, 0)$ ,  $M(\frac{\pi}{2}, 0)$ ,  $N(0, \frac{\pi}{2})$  при обходе его против хода часовой стрелки.

### Литература:

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс. - 2006. - 602 с.
3. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов и др. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит. - Т.3: Функции нескольких переменных. - 2003. - 468 с.

## РАЗДЕЛ VII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### Тема 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

6 часа

### Содержание

#### Практическое занятие 1

1. Проверить, является ли решением дифференциальных уравнений указанные функции:
  - 1)  $y'' + y = 0$ ,  $y = \sin x$ ;
  - 2)  $y'' = x^2 + y^2$ ,  $y = \frac{1}{x}$ .
2. Методом изоклин построить поле интегральных кривых уравнения  $y' = x$ .
3. Найти общее решение дифференциальных уравнений:
  - 1)  $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$ ;
  - 2)  $y'tgx = y$ ;
  - 3)  $\frac{xdy}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{ydx}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$ .

4. Найти общее решение уравнения  $(y - x)ydx + x^2dy = 0$ .
5. Найти частное решение уравнения  $2xyy' = x^2 + y^2$ , при  $y(1) = 2$ .

## Практическое занятие 2

1. Найти общее решение уравнения  $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$
2. Решить линейные дифференциальные уравнения: 1)  $xy' = x^3 + y$       2)  $(x + y^2)y' = 1$ .
3. Найти частное решение уравнения  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ , при  $y(0) = 0$ .
4. Найти общее решение уравнения  $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$ .
5. Найти общее решение уравнения  $\frac{2x}{y^3} dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4} dy = 0$
6. Найти общее решение уравнения  $(2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0$ .
7. Найти общее решение уравнение  $(x + \sin y)dx + (x \cos y + \sin y)dy = 0$ .

## Тема 2. Дифференциальные уравнения высших порядков 10 часа

### Содержание

#### Практическое занятие

*Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка*

1. Найти общее решение уравнения  $y'' = \frac{1}{x}$
2. Найти частное решение уравнения  $y'' = \frac{1}{a} \sqrt{1 + (y')^2}$ , при  $y(0) = a$ ,  $y'(0) = 0$
3. Найти частное решение уравнения  $yy'' + y'^2 = y'^3$ , при  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .
4. Найти общее решение уравнения  $y'' = \sin x$ .
5. Найти частное решение уравнения  $y'' = xe^{-x}$ , при  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .
6. Найти общее решение уравнения  $xy'' + y' = 0$ .
7. Найти частное решение уравнения  $xy'' - y' = x^2 e^x$ , при  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 0$ .
8. Найти общее решение уравнения  $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$ .
9. Найти частное решение уравнения  $y'' = y'^2 - y$ , при  $y(1) = -\frac{1}{4}$ ,  $y'(1) = \frac{1}{2}$ .

*Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка*

1. Найти общее решение  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .
2. Найти общее решение  $y'' - \frac{y'}{x} = x$ .
3. Найти общее решение уравнения  $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$  методом вариации произвольной постоянной.
4. найти общее решение уравнения  $y'' + 4y' = 2x - 3$  методом неопределенных коэффициентов.

5. Найти общее решение уравнения  $y'' - 2y' + 2y = x^2$
6. Найти общее решение уравнения  $y'' - 2y' - 3y = (2x - 3)e^{-x}$ .
7. Найти общее решение уравнения  $y'' + 4y' + 5y = 2\cos x - \sin x$ .
8. Найти общее решение уравнения  $y'' + y = xe^x + 2e^{-x}$ .

### Литература:

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для студ. пед. вузов / И.И. Баврин. - М.: Высш. шк., 2006. - 326, [1] с.
2. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс. - 2006. - 602 с.
3. Сборник задач по математическому анализу / Л. Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов и др. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Физматлит. - Т.3: Функции нескольких переменных. - 2003. - 468 с.
4. Сёмочкина, О.А. Дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью специального вида: Учебное пособие / О.А. Сёмочкина. - Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2009.

## РАЗДЕЛ VIII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### Тема 1. Комплексные числа

4 часа

### Содержание

#### Практическое занятие 1-2

1. Найти сумму, разность, произведение и частное двух комплексных чисел  $z_1 = -3 + 4i$  и  $z_2 = 4 - 2i$  и изобразить  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_1 \cdot z_2$  и  $\frac{z_1}{z_2}$  на комплексной плоскости.
2. Найти аргументы и модули сопряженных комплексных чисел  $z = 1 + i$  и  $\bar{z} = 1 - i$ . Записать их в показательной и тригонометрической формах.
3. Пусть  $\operatorname{Re} z = x$ ,  $\operatorname{Im} z = y$  и  $z \neq 0$ . Доказать, что  $\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$ .
4. Доказать равенства: 1)  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ ; 2)  $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$ ; 3)  $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ ; 4)  $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$ .
5. Дать геометрическое описание множеств всех точек комплексной плоскости, удовлетворяющих следующим неравенствам:
  - 1)  $\operatorname{Re} z > 0$ ;      2)  $\operatorname{Im} z \leq 1$ ;      3)  $|\operatorname{Re} z| < 1$ ;      4)  $|\operatorname{Im} z| < 1, 0 < \operatorname{Re} z < 1$ ;
  - 5)  $|z| \leq 1$ ;      6)  $|z - i| > 1$ ;      7)  $0 < |z + i| < 2$ ;      8)  $1 < |z - 1| < 3$ ;
  - 9)  $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ .
6. Записать с помощью неравенств, следующие множества точек комплексной плоскости:
  - 1) первый квадрант;
  - 2) полукруг радиуса 1 (без окружности) с центром в точке  $z = 0$ , расположенный слева от мнимой оси;
  - 3) полоса, состоящая из точек, отстоящих от мнимой оси на расстояние, меньше 1.
7. Найти значения функции  $w = z^2 + z$  при: 1)  $z = 1 + i$ ; 2)  $z = 2 - i$ ; 3)  $z = i$ ; 4)  $z = -1$ .

8. Найти значения функции  $f(z) = x^2 + y^2 i$ , где  $z = x + yi$ : 1)  $f(1+2i)$ ; 2)  $f(2-3i)$ ; 3)  $f(0)$ ; 4)  $f(-i)$ .
9. Показать, что функция  $w = |z|$  непрерывна при любом значении  $z$ .
10. Показать, что  $w = z^2$  - непрерывная функция при любом значении  $z$ .

**Домашнее задание:** [1] 1018-1020

#### **Литература:**

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС21век. Изд-во «Мир и образование». – 2005. – 415 с.
2. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций. / А.И. Маркушевич. – М.: Изд-во «Наука». – 1966. – 387 с.

### **Тема 2. Функции комплексной переменной**

*4 часа*

#### **Содержание**

#### **Практическое занятие 1-2**

1. Найти значения функции  $w = z^2 + z$  при: 1)  $z = 1+i$ ; 2)  $z = 2-i$ ; 3)  $z = i$ ; 4)  $z = -1$ .
2. Найти значения функции  $f(z) = x^2 + y^2 i$ , где  $z = x + yi$ : 1)  $f(1+2i)$ ; 2)  $f(2-3i)$ ; 3)  $f(0)$ ; 4)  $f(-i)$ .
3. Показать, что функция  $w = |z|$  непрерывна при любом значении  $z$ .
4. Показать, что  $w = z^2$  - непрерывная функция при любом значении  $z$ .
5. С помощью функции  $w = \frac{1}{z}$  отобразить на плоскость  $uOv$  точки: 1)  $(1;1)$ ; 2)  $(0;-2)$ ; 3)  $(2;0)$ .
6. С помощью функции  $w = z^3$  отобразить на плоскость  $uOv$  линию  $y = x$ .
7. Пусть  $w = z^2$  и  $z$  описывает квадрат, определяемый неравенствами  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Какую область описывает  $w$ ?
8. С помощью функции  $w = 2z + 1$  найти отображение окружности  $x^2 + y^2 = 1$  на плоскость  $uOv$ .

**Домашнее задание:** [1] 1033-1035, 1037-1040

#### **Литература:**

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС21век. Изд-во «Мир и образование». – 2005. – 415 с.
2. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций. / А.И. Маркушевич. – М.: Изд-во «Наука». – 1966. – 387 с.

### Тема 3. Основные элементарные функции

4 часа

#### Содержание

##### Практическое занятие 1-2

1. Найти модуль и аргумент комплексных чисел:

а)  $\operatorname{th} \pi i$ .      б)  $10^i$ .      в)  $3^{2-i}$ .

2. Найти логарифмы следующих чисел:

а)  $-i$ .      б)  $i$ .      в)  $-1-i$ .      г)  $3-2i$ .      д)  $i^i$ .

3. Найти:

а)  $i^{\frac{1}{i}}$ .      б)  $1^i$ .      в)  $(-1)^{\sqrt{2}}$ .

г)  $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$ .      д)  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$ .      е)  $(1-i)^{3-3i}$ .

3. Найдите модули и главные значения аргументов чисел: 1)  $e^{2-3i}$ ,      2)  $e^{3+4i}$ .

4. Вычислите:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Ln}\left(\frac{1-i}{2}\right), \\ & \operatorname{Ln}(-2+3i), \\ & (-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, \\ & 2^i, \\ & (3-4i)^{1+i}. \end{aligned}$$

5. Решить уравнения:

1)  $\sin z + \cos z = 2$ ,      2)  $\sin z - \cos z = i$ .

#### Литература:

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век. Изд-во «Мир и образование». – 2005. – 415 с.
2. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций. / А.И. Маркушевич. – М.: Изд-во «Наука». – 1966. – 387 с.

### Тема 4. Дифференцирование функций комплексной переменной.

4 часа

#### Содержание

##### Практическое занятие 1-2

1. Дана действительная часть  $u = 2^x \cos(y \ln 2)$  дифференцируемой функции  $f(z)$ .  
Найти функцию  $f(z)$ .

1. Найдите  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ;

2. Воспользоваться условием:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ . Записать  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .
  3. Интегрируем  $\frac{\partial v}{\partial y}$  по  $y$ , найдем  $v(x, y) = f(x, y) + \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  произвольная функция.
  4. Используя другое условие Коши-Римана:  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  и производную функции  $v(x, y) = f(x, y) + \varphi(x)$  по  $x$  найти  $\varphi'(x)$ .
  5. Интегрируя  $\varphi'(x)$ , найти  $\varphi(x)$ . Записать  $v(x, y) = f(x, y) + \varphi(x)$ .
  6. Записать функцию  $f(z)$ .
2. Дана мнимая часть  $v(x, y) = \sin x \cdot \operatorname{sh} y$  дифференцируемой функции  $f(z)$ . Найти эту функцию. ( $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x$ ;  $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x$ ;  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ;  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ).
1. Найти  $\frac{\partial v}{\partial y}$ ;
  2. Воспользоваться условием:  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ . Записать  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .
  3. Интегрируем  $\frac{\partial u}{\partial x}$  по  $x$ , найдем  $u(x, y) = g(x, y) + \varphi(y)$ , где  $\varphi(y)$  произвольная функция.
  4. Используя другое условие Коши-Римана:  $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$  и производную функции  $u(x, y) = g(x, y) + \varphi(y)$  по  $y$  найти  $\varphi'(y)$ .
  5. Интегрируя  $\varphi'(y)$ , найти  $\varphi(y)$ . Записать  $u(x, y) = g(x, y) + \varphi(y)$ .
  6. Записать функцию  $f(z)$ .
3. Показать, что функция  $f(z) = z \operatorname{Re} z$  дифференцируема лишь в точке  $z = 0$  и найти  $f'(0)$
4. Восстановить, если это возможно, аналитическую функцию по её:
- 1) действительной части  $u(x, y) = e^x \cos y$ ,
  - 2) мнимой части  $v(x, y) = y^2 - x^2 - 2$ ,
  - 3) мнимой части  $v(x, y) = -\frac{1}{y}$ ,
  - 4) действительной части  $u(x, y) = y - y^2 + x^2 + 1$ .

**Домашнее задание:** [1] 1047-1049, 1051

#### **Литература:**

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век. Изд-во «Мир и образование». – 2005. – 415 с.
2. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций. / А.И. Маркушевич. – М.: Изд-во «Наука». – 1966. – 387 с.

### **Тема 5. Интегрирование функций комплексной переменной**

4 часа

#### **Содержание**

## Практическое занятие 1-2

1. Используя определение интеграла найти интеграл от функции  $f(z) = 1$ .
2. Используя определение интеграла найти интеграл от функции  $f(z) = z$ .
3. Найти интеграл от функции  $f(z) = \frac{dz}{z-a}$ , где  $|z-a| = \rho$  проходиться в направлении против часовой стрелки.
4. Найти интеграл от функции  $f(z) = \frac{dz}{z-a}$ , где  $|z-a| = \rho$  проходиться в направлении против часовой стрелки.
5. Вычислить  $I = \int_{AB} \sin z dz$ ,  $A(z_1) = 1$ ,  $A(z_2) = i$  (по любой кривой).
6. Вычислить  $I = \oint_C \frac{t^3 dt}{t-2i}$ , где  $C$  - любой контур, содержащий внутри точку  $2i$ .
7. Вычислить.  $I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2,5} \frac{e^z dz}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ .

Домашнее задание: [1] 1033-1035, 1037-1040

### Литература:

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век. Изд-во «Мир и образование». – 2005. – 415 с.
2. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций. / А.И. Маркушевич. – М.: Изд-во «Наука». – 1966. – 387 с.

## Тема 6. Ряды в комплексной плоскости

6 часа

### Содержание

#### Практическое занятие 1

#### Практическая часть

1. Разложить в ряд Тейлора по степеням бинома  $z-i$  функцию  $f(z) = z^5$ .
2. Разложить в ряд Тейлора по степеням двучлена  $z - (1 - \frac{\pi i}{2})$  функцию  $f(z) = ch(1-z)$ .
3. Исследовать сходимость ряда  $1 + \frac{z-1}{5} + \frac{(z-1)^2}{5^2} + \frac{(z-1)^3}{5^3} + \dots$
4. Исследовать сходимость ряда  $1 + \frac{z}{i} + \frac{z^2}{i^2} + \frac{z^3}{i^3} + \dots$ .

Домашнее задание: 1085, 1086, 1087.

#### Практическое занятие 2-3

1. Найти вычеты функции  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-3)}$ .

2. Найти вычеты функции  $f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$ .
3. Найти вычеты функции  $f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z + 5}$ .
4. Найти вычет функции  $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)^3}$ .
5. Найти вычет функции  $f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}$  относительно полюса  $z = 0$ .
6. Найти  $\int_{\gamma} \frac{z+1}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz$ , где  $\gamma$  - замкнутый контур, внутри которого находятся полюсы  $z = 1, z = 2, z = 3$ .
7. Найти  $\int_{\gamma} \frac{z^2 dz}{(z-i)(z+i)(z-2)}$ , где  $\gamma$  - окружность  $|z| = 3$ .
8. Найти  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z(z+2)(z+4)}$ , где  $\gamma$  - окружность: 1)  $|z| = 1$ ; 2)  $|z| = 3$ ; 3)  $|z| = 5$ .

#### Литература:

1. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век. Изд-во «Мир и образование». – 2005. – 415 с.
2. Маркушевич, А.И. Краткий курс теории аналитических функций. / А.И. Маркушевич. – М.: Изд-во «Наука». – 1966. – 387 с.

### 6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

#### 6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
ОПК-1, ПК-1	Собеседование	Низкий (неудовлетворительно)	Студент отвечает неправильно, нечетко и неубедительно, дает неверные формулировки, в ответе отсутствует какое-либо представление о вопросе
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент отвечает неконкретно, слабо аргументировано и не убедительно, хотя и имеется какое-то представление о вопросе
		Базовый (хорошо)	Студент отвечает в целом правильно, но недостаточно полно, четко и убедительно
		Высокий (отлично)	Ставится, если продемонстрированы знание вопроса и самостоятельность мышления, ответ соответствует требованиям правильности, полноты и аргументированности.

ОПК-1, ПК-1	Самостоя- тельная ра- бота	Низкий (неудовлетворительно)	1. Студент допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3»; 2. или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил: 1. не более двух грубых ошибок; 2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета; 3. или не более двух-трех негрубых ошибок; 4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов; 5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
		Базовый (хорошо)	Студент выполнил работу полностью, но допустил в ней: 1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета; 2. или не более двух недочетов.
		Высокий (отлично)	Студент: 1. выполнил работу без ошибок и недо- четов; 2. допустил не более одного недочета.
ОПК-1, ПК-1	Устный ответ	Низкий (неудовлетворительно)	Студент обнаруживает незнание боль- шей части соответствующего вопроса, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно из- лагает материал. Оценка «2» отмечает такие недостатки в подготовке, кото- рые являются серьезным препятствием к успешному овладению последующим материалом.
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент обнаруживает знание и пони- мание основных положений данной темы, но: 1) излагает материал неполно и допус- кает неточности в определении поня- тий или формулировке правил; 2) не умеет достаточно глубоко и дока- зательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; 3) излагает материал непоследова- тельно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

		Базовый (хорошо)	Студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «5», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.
		Высокий (отлично)	Студент: 1) полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий; 2) обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные; 3) излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.
ОПК-1, ПК-1	Тест	Низкий (неудовлетворительно)	Количество правильных ответов на вопросы теста менее 60 %
		Пороговый (удовлетворительно)	Количество правильных ответов на вопросы теста от 61-75 %
		Базовый (хорошо)	Количество правильных ответов на вопросы теста от 76-84 %
		Высокий (отлично)	Количество правильных ответов на вопросы теста от 85-100 %
ОПК-1, ПК-1	Индивидуальное задание	Низкий (неудовлетворительно)	Ответ студенту не зачитывается если: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Задание выполнено менее, чем на половину;</li> <li>• Студент обнаруживает незнание большей части соответствующего материала, допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно излагает материал.</li> </ul>
		Пороговый (удовлетворительно)	Задание выполнено более, чем на половину. Студент обнаруживает знание и понимание основных положений задания, но: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий;</li> <li>• Не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;</li> <li>• Излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.</li> </ul>
		Базовый (хорошо)	Задание в основном выполнено. Ответы правильные, но:

			<ul style="list-style-type: none"> <li>• В ответе допущены малозначительные ошибки и недостаточно полно раскрыто содержание вопроса;</li> <li>• Не приведены иллюстрирующие примеры, недостаточно чётко выражено обобщающее мнение студента;</li> <li>• Допущено 1-2 недочёта в последовательности и языковом оформлении излагаемого.</li> </ul>
		Высокий (отлично)	<p>Задание выполнено в максимальном объеме. Ответы полные и правильные.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;</li> <li>• Обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры;</li> <li>• Излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка.</li> </ul>
ПК-2	Курсовая работа	Низкий (неудовлетворительно)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Не выполнены требования к оформлению работ, согласно нормоконтролю.</li> <li>• Не раскрыто основное содержание учебного материала.</li> <li>• Курсовая работа не допущена научным руководителем к защите.</li> <li>• Не сформированы компетенции, умения и навыки.</li> </ul>
		Пороговый (удовлетворительно)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Выполнены требования к оформлению работ, согласно нормоконтролю.</li> <li>• Не полно раскрыто содержание материала работы, но точно используется терминология; нарушена определенная логическая последовательность.</li> <li>• В работе представлена практическая часть, выполненная самостоятельно; не показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами и их применение в новой ситуации.</li> <li>• При защите работы продемонстрирована сформированность компетенций, умений и навыков, допущены недочёты при освещении основного содержания курсовой работы, получены ответы не на все вопросы комиссии.</li> </ul>
		Базовый (хорошо)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Выполнены все требования к оформлению работ, согласно нормоконтролю.</li> </ul>

			<ul style="list-style-type: none"> <li>• Полно раскрыто содержание материала; материал изложен грамотно, в определенной логической последовательности; точно используется терминология.</li> <li>• В работе представлена практическая часть, выполненная самостоятельно; показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами.</li> <li>• При защите работы продемонстрирована сформированность компетенций, умений и навыков, допущены один – два недочёта при освещении основного содержания курсовой работы, получены ответы не на все вопросы комиссии.</li> </ul>
		Высокий (отлично)	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Выполнены все требования к оформлению работ, согласно нормоконтролю.</li> <li>• Полно раскрыто содержание материала; материал изложен грамотно, в определенной логической последовательности; точно используется терминология.</li> <li>• В работе представлена практическая часть, выполненная самостоятельно; показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами и их применение в новой ситуации.</li> <li>• При защите работы продемонстрирована сформированность и устойчивость компетенций, умений и навыков; получены полные ответы на вопросы комиссии.</li> </ul>

## 6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт/экзамен, защита курсовой работы.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

### Критерии оценивания устного ответа на зачете

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если:

- выполнены все контрольные мероприятия из фонда оценочных средств по разделу;
- даны полные обоснованные ответы на два пункта билета.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если:

- не выполнены контрольные мероприятия из фонда оценочных средств по разделу:  
или
- не представлены верные обоснованные ответы на два пункта билета.

### **Критерии оценивания устного ответа на экзамене**

Оценка 5 (отлично) ставится, если:

- студент полно излагает материал, дает правильное определение основных понятий;
- обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике;
  - излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка;
  - практическая часть экзаменационного билета выполнена в полном объеме.

Оценка 4 (хорошо) ставится, если:

- студент дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для отметки «5», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет;
- 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого.

Оценка 3 (удовлетворительно) ставится, если:

- студент обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы;
- излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил;
  - не умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры;
  - излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого.

Оценка 2 (неудовлетворительно) ставится, если:

- студент обнаруживает незнание большей части соответствующего вопроса;
- допускает ошибки в формулировке определений и правил, искажающие их смысл, беспорядочно и неуверенно излагает материал.

### **Критерии оценивания курсовой работы**

**Оценка «5» (отлично)** ставится, если:

1. Выполнены все требования к оформлению работ, согласно нормоконтролю.
2. Полно раскрыто содержание материала курсовой работы; материал изложен грамотно, в определенной логической последовательности; точно используется терминология.
3. В работе представлена практическая часть, выполненная самостоятельно; показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами и их применение в новой ситуации.
4. При защите курсовой работы продемонстрирована сформированность и устойчивость компетенций, умений и навыков; получены полные ответы на вопросы комиссии.

**Оценка «4» (хорошо)** ставится, если:

1. Выполнены все требования к оформлению работ, согласно нормоконтролю.
2. Полно раскрыто содержание материала курсовой работы; материал изложен грамотно, в определенной логической последовательности; точно используется терминология.
3. В работе представлена практическая часть, выполненная самостоятельно; показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами.
4. При защите курсовой работы продемонстрирована сформированность компетенций, умений и навыков, допущены один – два недочёта при освещении основного содержания курсовой работы, получены ответы не на все вопросы комиссии.

**Оценка «3» (удовлетворительно)** ставится, если:

1. Выполнены требования к оформлению работ, согласно нормоконтролю.

2. Не полно раскрыто содержание материала курсовой работы, но точно используется терминология; нарушена определенная логическая последовательность.

3. В работе представлена практическая часть, выполненная самостоятельно; не показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами и их применение в новой ситуации.

4. При защите курсовой работы продемонстрирована сформированность компетенций, умений и навыков, допущены недочёты при освещении основного содержания курсовой работы, получены ответы не на все вопросы комиссии.

**Оценка «2» (неудовлетворительно)** ставится, если:

1. Не выполнены требования к оформлению работ, согласно нормоконтролю.
2. Не раскрыто основное содержание учебного материала.
3. Курсовая работа не допущена научным руководителем к защите.
4. Не сформированы компетенции, умения и навыки.

### **6.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины**

#### **1 семестр**

#### **ВОПРОСЫ К СОБЕСЕДОВАНИЮ № 1**

#### **«ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ»**

1. Предел функции в точке и на бесконечности, геометрический смысл.
2. Определения непрерывности функции в точке на разных языках.
2. Точки разрыва и их классификация.
3. Теоремы об арифметических операциях над непрерывными функциями.

#### **3 семестр**

#### **ВОПРОСЫ К СОБЕСЕДОВАНИЮ № 2**

#### **«ПРИЛОЖЕНИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ»**

1. Вычисление площадей плоских фигур.
2. Вычисление объемов тел вращений.
3. Нахождение длин дуг.
4. Вычисление площадей поверхностей.

#### **1 семестр**

#### **Самостоятельная работа № 1**

1. Дать определение на языке " $\varepsilon - \delta$ " и на языке окрестностей.

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 2$$

2. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел в точке.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x + \pi}$$

Вычислить:  $x \rightarrow \pi$   $x + \pi$ .

#### **Самостоятельная работа № 2**

Записать определение на языке " $\varepsilon - \delta$ " и дать геометрическую иллюстрацию:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$$

Восстановить запись:

$$*** = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \mid \forall x \in D(f) \text{ из } *** \Rightarrow |f(x) + 7| < \varepsilon$$

Вычислить:  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 49}$ .

### Самостоятельная работа № 3

1. Дайте определение функции, дифференцируемой в точке.
2. Составьте приращение  $\Delta f$  для функции  $f(x) = 2 \cos x - x^2$ .
3. Найдите по определению производную функции  $y = x^2 + 1$ .

### Самостоятельная работа № 4

1. Составьте уравнение касательной к кривой  $y = \ln(x^2)$ , которая параллельна прямой  $y = -x$ .
2. В каких точках касательная к графику функции  $y = \frac{x-8}{x+8}$  образует с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ ?

### Самостоятельная работа № 5

1. По графику функции схематически построить график производной
2. Найти промежутки монотонности, точки экстремума, промежутки выпуклости, вогнутости, точки перегиба:

$$y = \frac{12x}{9 + x^2}$$

сти, точки перегиба:

## 2 семестр

### Самостоятельная работа № 1

Найти интегралы:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 9}; \quad \int \frac{3dx}{\sqrt{3-x^2}}; \quad \int \frac{xdx}{2+x^2}; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{5+x^2}}; \quad \int \frac{7dx}{x^2-4}; \quad \int 7^{2x+1} dx$$

## 4 семестр

### Самостоятельная работа № 1

#### Комплексные числа

1. Представить число  $2\sqrt{2} - i$  в тригонометрической форме записи, взяв главное значение аргумента.
2. Вычислить  $\left[ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \right]^{60} + \left[ \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \right]^{60}$ .
3. Изобразить множество  $D_1 = \{z \in \mathbb{C}: |z+1+i| > 2, \operatorname{Im} z > 0\}$  на комплексной плоскости.

## ТЕСТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

### Инструкция для студента

Тест содержит 25 заданий, из них 15 заданий – часть А, 5 заданий – часть В, 5 заданий – часть С. На его выполнение отводится 90 минут. Если задание не удастся выполнить сразу, перейдите к следующему. Если останется время вернитесь к пропущенным заданиям. Верно выполненные задания части А оцениваются в 1 балл, части В – 2 балла, части С – 5 баллов.

## Часть А

К каждому заданию части А даны несколько ответов, из которых только один верный. Выполнив задание, выберите верный ответ и укажите в бланке ответов.

А1. Найти предел функции  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 + 2x - 35}{x - 5}$

1) 0	2) 12	3) $+\infty$	4) 1
------	-------	--------------	------

А2. Найти предел функции  $\lim_{x \rightarrow -a} \frac{6 \sin 2(a+x)}{(x+a)}$

1) 0	2) 6	3) 1	4) 12
------	------	------	-------

А3. Найти предел функции  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x + 6}{(\sqrt{x} + 5) \cdot (\sqrt{x} - 5) \cdot (1-x) \cdot (7x^2 + 3)}$

1) $\infty$	2) $-\frac{1}{7}$	3) 0	4) 1
-------------	-------------------	------	------

А4. Найти предел функции  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x+1} \right)^{x+1}$

1) $e^2$	2) $e^{-1}$	3) $e^3$	4) $e$
----------	-------------	----------	--------

А5. Найти предел функции  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2x^2 - 5x + 4} - \sqrt{x^2 - 3x} \right)$

1) $\infty$	2) $\frac{1}{3}$	3) 1	4) 0
-------------	------------------	------	------

А6. Найти предел функции  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x}$

1) $+\infty$	2) $-\infty$	3) 1	4) 0
--------------	--------------	------	------

А7. Для функции  $y = x \cdot e^{-3x}$  найти  $dy$

1) $(e^{-3x} + x \cdot e^{-3x})dx$	3) $\left( \frac{x^2}{2} \cdot e^{-3x} - \frac{x}{3} \cdot e^{3x} \right)dx$
2) $(e^{-3x} - 3x \cdot e^{-3x})dx$	4) $(-e^{-3x} + x \cdot e^{-3x})dx$

А8. Найти интеграл  $\int x e^{3x} dx$

1) $3x e^{3x} - 9e^{3x} + C$	2) $\frac{x}{3} e^{3x} + \frac{1}{3} e^{3x} + C$
3) $\frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$	4) $x^2 e^{3x} - \frac{x}{3} e^{3x} + C$

А9. Вычислить интеграл  $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$

1) $3 \ln^2 x + C$	2) $\frac{\ln^4 x}{4x} + C$	3) $\ln^3 x \cdot \ln  x  + C$	4) $\frac{\ln^4 x}{4} + C$
--------------------	-----------------------------	--------------------------------	----------------------------

A10. Рациональную дробь  $\frac{2x^2 + 5}{(x^2 + x + 1)(x + 1)^2(x - 3)}$  можно разложить в сумму простейших дробей:

1) $\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x-3}$	2) $\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{x-3}$
3) $\frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} + \frac{F}{x-3}$	4) $\frac{A}{x^2+Bx+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1} + \frac{F}{x-3}$

A11. Выбрать на чертеже фигуру, ограниченную линией  $y = 4x - x^2$  и осью абсцисс.

1) 0	2) -4	3) 0	4) -4
42	0	4	0

A12. Область определения функции  $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$  изображена на рисунке

1)	2)	3)	4)
----	----	----	----

A13. Указать область интегрирования для суммы повторных интегралов

$$\int_{-1}^0 dy \int_{y^2}^1 f dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f dx$$

1)	2)	3)	4)
----	----	----	----

A14. Изменить порядок интегрирования в сумме повторных интегралов

$$\int_{-1}^0 dy \int_{y^2}^1 f dx + \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f dx$$

1) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f dy$	2) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{x^2} f dy$	3) $\int_{-1}^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} f dy$	4) $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f dy$
--	--	--	---

A15. Найти частную производную  $\frac{\partial u}{\partial y}$  для функции  $u = y + \sin(x \cdot y)$

1) $1 + \cos(x \cdot y)$	2) $1 + x \cos(x \cdot y)$	3) $1 - \cos(x \cdot y)$	4) $1 - x \cos(x \cdot y)$
--------------------------	----------------------------	--------------------------	----------------------------

**ЧАСТЬ В**

Будьте внимательны! Задания части В могут быть 3-х типов:

- 1) задания, содержащие несколько верных ответов;
- 2) задания на установление соответствия;
- 3) задания, в которых ответ должен быть дан в виде числа, слова, символа.

В1.  $x_0$  – точка устранимого разрыва, если:

- а)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \exists$       б)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$       в)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, A \neq f(x)$   
 г)  $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$

1) а	2) б	3) в	4) г
------	------	------	------

В2. Составить уравнение касательной к графику функции  $y = -3x^3 - 5x^2 - 6x + 24$  в точке с абсциссой  $x = -2$ .

1) $y = 22x - 4$	2) $y = -2(11x + 2)$	3) $y = -22x - 4$	4) $y = 2(11x + 2)$
------------------	----------------------	-------------------	---------------------

В3. Множество  $(1;3)$  является интервалом сходимости ряда.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$	2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$	3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2}$	4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$
--	--	--	--

В4. Из рядов а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{9n}$  б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$  в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$  сходятся

1) а	2) б	3) в	4) все расходятся
------	------	------	-------------------

В5. Дана функция  $y = x \cdot e^{-3x}$ . Найти  $y''$

1) $-3e^{-3x}(2 - 3x)$	2) $-6e^{-3x} + 9x \cdot e^{-3x}$	3) $-3e^{-3x}(2 + 3x)$	4) $6e^{-3x} + 9xe^{3x}$
------------------------	-----------------------------------	------------------------	--------------------------

**ЧАСТЬ С**

Ответы к заданиям части С формулируются в свободной краткой форме и записываются в бланк ответов.

$$y = x^2 + \frac{1}{x}$$

С1. Найти точку локального минимума функции

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-10)^n}{n}$$

С2. Найти область сходимости ряда

С3. Вычислить приближенно с помощью дифференциала  $\sqrt{9,02}$ .

С4. Вычислить с точностью до 0,0001 значение выражения  $\sin 1^0$  (при помощи рядов).

С5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $y = 4x - x^2$  и осью абсцисс.

**Ответы**

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8
----	----	----	----	----	----	----	----

2	4	2	1	1	4	2	3
A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15	
4	2	3	2	1	2	2	

B1	B2	B3	B4	B5
3, 4	2, 3	1, 3	2, 3	1, 2

C1	$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ - точка минимума. $y = x^2 + \frac{1}{x}, y' = 2x - \frac{1}{x^2}, 2x - \frac{1}{x^2} = 0, x \neq 0, x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}},$ $+$ $0$ $x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
C2	$x_0 = 10, R = 1, (9, 11), x = 9 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} -$ условно сходится, $x = 11 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ - расходится. Ответ: $[9, 11)$
C3	$\sqrt{9,02} \approx \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0,2 = 3 + \frac{0,1}{3} \approx 3,033$
C4	$\sin 1^\circ = \sin \frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} - \frac{\pi^3}{180^3 \cdot 3!} \approx 0.0174$
C5	$\int_0^4 (4x - x^2) dx = \left( 2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big _0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$

### Критерии оценки тестовых заданий

За правильный ответ на вопросы заданий части А испытуемый получает 1 балл, заданий части В - 2 балла, заданий части С – 5 баллов.

Перевод тестовых баллов в четырех балльную шкалу оценок осуществляется по следующей шкале.

Неудовлетворительно	до 60% баллов за тест
Удовлетворительно	от 61% до 74% баллов за тест
Хорошо	от 75% до 84% баллов за тест
Отлично	более 85% баллов за тест

### Индивидуальное задание 1

Дифференциальное исчисление функции одного переменного

1. Найти:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0+} (\operatorname{ctg} 3x)^{\frac{4}{\ln x}}$ ; б)  $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2y - y^4} - \sqrt[3]{y}}{1 - \sqrt[4]{y}}$ ; в)  $\lim_{t \rightarrow \infty} 3t^2 (e^{\frac{4}{t^2}} - 1)$ .

1. Касательная к кривой  $y = 15x^2 - 5$  образует с осью абсцисс угол  $60^\circ$ . Составить уравнение касательной.

$$U = \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\ln \frac{5}{y}} \right)^8$$

2. Найти  $dU$ , если
3. Тело движется прямолинейно по закону  $S = t^3 - 3t + 4$ , ( $t$  - время в сек.,  $S$  - путь в м). Через какое время после начала движения скорость тела окажется равной 9 м/с?
4. Найти промежутки монотонности, точки экстремума:  
 $y = 16x^3 - 36x^2 + 24x - 9$ .

## Индивидуальное задание 2

### Ряды

1. Множество (1,3) является интервалом сходимости ряда:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$     c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$     d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

2. Определить сходимость рядов:

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{9n}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$     c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

3. Найти область сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-10)^n}{n}$ .

4. Вычислить с точностью до 0,0001 значение выражения  $\sin 1^\circ$  (при помощи рядов).

## Индивидуальное задание 3

### Интегральное исчисление функции одного переменного

1. Найти площадь эллипса, заданного уравнением  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

2. Вычислить интеграл  $\int_{-1}^1 x \operatorname{arctg} x \, dx$ .

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией  $r = 2(1 - \sin \varphi)$ .

4. Определить площадь поверхности тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  фигуры, ограниченной линиями:  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ .

5. Исследовать на сходимость несобственный интеграл  $I = \int_0^{\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx$ .

## Индивидуальное задание 4

### Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

1. Найти и изобразить на плоскости область определения функции двух переменных:

$$z = \arcsin(2y(1+x^2)-1).$$

2. Найти и изобразить на плоскости линии уровня функции двух переменных:

$$z + x \ln z + y = 0, \quad z = 0.$$

3. Найти все частные производные первого порядка функции:

$$z = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$$

4. Найти все частные производные второго порядка:

$$z = y^{\ln x}.$$

5. Найти полный дифференциал  $dz$  данной функции:

$$z = y \cdot x^y.$$

6. Вычислить приближенно:

$$\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1).$$

7. Исследовать функцию на экстремум:

$$z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8.$$

### Индивидуальное задание 5

*Интегральное исчисление функции нескольких переменных*

1. Построить область интегрирования  $\int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} f(x, y) dy$ .

2. Вычислить  $\int_3^4 dx \int_0^{\ln y} e^x dx$ .

3. Изменить порядок интегрирования  $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$ .

4. Переходя к полярным координатам, вычислить  $\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dx dy$ .

5. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями  $y = \ln x$ ,  $y = x - 1$ ,  $y = -1$ .

6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $2y^2 = x$ ,  $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1$ ,  $z = 0$ .

7. Найти момент инерции фигуры, ограниченной эллипсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  относительно его большой оси.

8. Найти координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями  $2y = x^2$ ,  $y = x^2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

9. Вычислить  $\iiint_V xy dx dy dz$ ;  $V: z = xy, x + y \leq 1, y \geq 0, z \geq 0$ .

### Индивидуальное задание 6

*Дифференциальные уравнения*

1. Методом изоклин построить поле интегральных кривых уравнения  $y' = x$ .
2. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

$$(1+x)y dx + (1-y)x dy = 0;$$

$$y' \operatorname{tg} x = y;$$

$$\frac{x dy}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{y dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

3. Найти общее решение уравнения  $y'' - 2y' + 2y = x^2$ .

4. Найти частное решение уравнения,  $y^{(4)} = \cos^2 x$  при  $3$   
 $y(0) = \frac{1}{32}, y'(0) = 0, y''(0) = \frac{1}{8}, y'''(0) = 0$ .

### Индивидуальное задание 7

*Функция комплексной переменной*

1. Восстановить аналитическую функцию  $f(z)$  по заданной функции  $\operatorname{Re} f(x, y) = x^2 - y^2 - x$ , если  $f(0) = 0$ .
2.  $\int_{AB} z \cdot \operatorname{Re} z \, dz$ , где  $AB$  – отрезок, точки  $A(0, 0)$  и  $B(1, 3)$ .
3.  $I = \int_{|z|=2} \frac{\sin z \, dz}{z \cdot (z-4) \cdot (z+3)}$ .

### Вопросы к зачету и экзамену

#### Вопросы зачета

#### I семестр

1. Действительные числа, их геометрическое изображение.
2. Модуль числа и его свойства.
3.  $\sup X$  и  $\inf X$ . Теорема о существовании супремума.
4. Числовые функции, основные понятия.
5. Монотонные и ограниченные функции.
6. Четность и периодичность функций.
7. Предел функции в точке.
8. Теорема о единственности предела.
9. Предельный переход в неравенствах.
10. Бесконечно малые функции и их свойства.
11. Предел суммы и произведения функций.
12. Предел частного двух функций.
13. Первый замечательный предел.
14. Односторонние пределы.
15. Предел сложной функции.
16. Бесконечно большие функции.
17. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими.
18. Сравнение бесконечно малых.
19. Предел функции на бесконечности.
20. Числовая последовательность, ее предел.
21. Второй замечательный предел.
22. Непрерывность функции в точке.
23. Точки разрыва и их классификация.
24. Арифметические операции над непрерывными функциями.
25. Непрерывность сложной функции.
26. Пределы и точки разрыва монотонной функции.
27. Непрерывность обратной функции.
28. Дифференцируемость функции. Непрерывность и дифференцируемость.
29. Производная, ее геометрический и механический смысл.
30. Необходимое и достаточное условия дифференцируемости.
31. Дифференциал, его геометрический и механический смысл.
32. Дифференцирование суммы, произведения, частного.
33. Производная сложной функции.

34. Производная обратной функции.
35. Производная степенной, показательной, логарифмической функций.
36. Производные тригонометрических функций.
37. Производные обратных тригонометрических функций.
38. Правила Лопиталя.
39. Экстремумы, необходимое условие. Достаточные условия.
40. Понятие выпуклости и вогнутости, их достаточные условия.
41. Точки перегиба, достаточные условия.

### Вопросы экзамена

#### II семестр

1. Числовые ряды. Основные определения числового ряда.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.
4. Знакопеременный ряд. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда.
5. Знакопередающиеся ряды. Признак сходимости Лейбница.
6. Остаток ряда и его оценка. Теорема об оценке знакопередающегося ряда сходящегося по признаку Лейбница.
7. Функциональный ряд. Область сходимости функционального ряда.
8. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
9. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора
10. Первообразная функция, неопределенный интеграл. Свойства неопределенного интеграла.
11. Основные методы интегрирования: метод разложения, метод подстановки.
12. Основные методы интегрирования: метод интегрирования по частям.
13. Интегрирование рациональных дробей.
14. Интегрирование иррациональных функций.
15. Интегрирование тригонометрических функций.
16. Понятие определенного интеграла. Геометрический и физический смысл определенного интеграла.
17. Свойства определенного интеграла.
18. Приложения определенного интеграла.

### Вопросы экзамена

#### III семестр

1. Понятие функции нескольких переменных, ее область определения. График функции двух переменных.
2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
3. Дифференцируемость функций, определение частных производных, их геометрический смысл.
4. Полный дифференциал.
5. Понятие максимума и минимума. Необходимое и достаточное условия экстремума для функции двух переменных.
6. Понятие двойного интеграла. Геометрический смысл двойного интеграла (вывод: задача об объеме цилиндрической поверхности).
7. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах.
8. Понятие тройного интеграла. Физический смысл тройного интеграла (вывод: задача о массе тела).

9. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах.
10. Свойства двойного интеграла (доказать одно свойство).
11. Свойства тройного интеграла (доказать одно свойство).
12. Приложение двойного интеграла (доказательство одного приложения).
13. Приложение тройного интеграла (доказательство одного приложения).
14. Полярные координаты (показать, как связаны декартовы координаты с полярными; вывести якобиан). Вычисление двойного интеграла в полярных координатах.
15. Цилиндрические координаты (показать, как связаны декартовы координаты с полярными; вывести якобиан). Вычисление двойного интеграла в цилиндрических координатах.
16. Сферические координаты (показать, как связаны декартовы координаты с полярными; вывести якобиан). Вычисление двойного интеграла в сферических координатах.
17. Понятие криволинейного интеграла первого рода (вывод: задача о массе кривой). Свойства криволинейного интеграла первого рода.
18. Понятие криволинейного интеграла второго рода (вывод: работа переменной силы). Свойства криволинейного интеграла второго рода. Формула Грина.
19. Дифференциальные уравнения, основные понятия и определения. Дифференциальные уравнения первого порядка.
20. Геометрическое интегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка вида (изоклины).
21. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
22. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Свойства решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
23. Структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения (метод неопределенных коэффициентов) для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.
24. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка.

### Вопросы зачета

#### IV семестр

1. Геометрическое представление комплексных чисел на плоскости. Операции над комплексными числами.
2. Функция комплексного переменного.
3. Предел функции в точке.
4. Непрерывность.
5. Производная и дифференциал.

6. Правила дифференцирования.
7. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости во внутренней точке области (доказательство)
8. Ряды с комплексными членами. Степенные ряды.
9. Понятие интеграла от функции комплексного переменного (вывод). Свойства интегралов от функции комплексного переменного.
10. Сведение к вычислению обычного интеграла (вывод формулы)
11. Интегральная теорема Коши.
12. Независимость интеграла от пути интегрирования.
13. Теорема Коши для многосвязных областей
14. Интеграл и первообразная.
15. Интегральная формула Коши.
16. Ряд Лорана.
17. Изолированные особые точки.
18. Понятие вычета. Основные теоремы о вычетах.

#### **Примерный список тем курсовых работ**

Дискретное логарифмирование в простых полях  
 Вероятностный алгоритм проверки неприводимости многочленов над конечными полями  
 Дискретное преобразование Фурье  
 Числовая нотация Конвея  
 Нумерация перестановок  
 Деревяшко Брокко  
 Виды сверток и их применение  
 Скрытые марковские процессы  
 Математические основы метода распознавания образов  
 Методы суммирования  
 Методы алгебры в 3 D играх  
 Применение p-адических чисел в криптографии  
 Архитектура сверточных нейронных сетей  
 Архитектура рекуррентных нейронных сетей  
 Архитектура генеративно-состязательных сетей

### **7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ**

**Информационные технологии** – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- официальный сайт БГПУ;
- корпоративная сеть БГПУ;
- электронные библиотечные системы.

## 8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

## 9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

### 9.1 Литература

1. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу/ Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М: Высшая школа, 2000. – 695с. (8 экз.)
2. Баврин, И. И. Математический анализ: учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. И. Баврин. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 327 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-04617-5. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/507814>
3. Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие для вузов / Б.П. Демидович. - М.: Астрель: АСТ, 2004. - 558 с. (22 экз.)
4. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 324 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-07067-5. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/491294> (дата обращения: 18.10.2022).
5. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2: учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 315 с. – (Высшее образование). – ISBN 978-5-534-07069-9. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/491295> (дата обращения: 18.10.2022).
6. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу/ Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель. – 2006. – 558 с. (28 экз.)
7. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс. – 2006. – 602 с. (16 экз.)
8. Шипачев, В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник и практикум для среднего профессионального образования / В. С. Шипачев. – Москва: Издательство Юрайт, 2022. – 212 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-04547-5. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/492012>

## 9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Федеральный портал «Российское образование» – Режим доступа: <http://www.edu.ru>
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» – Режим доступа: <http://www.window.edu.ru>
3. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов – Режим доступа: <http://fcior.edu.ru>
4. Сайт Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам (Роспатента). – Режим доступа: <http://www.fips.ru/rospatent/index.htm>

## 9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». – Режим доступа: <https://urait.ru>
2. Полпред (обзор СМИ). – Режим доступа: <https://polpred.com/news>

## 10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, с выходом в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами.

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Windows, Linux; офисные программы Microsoft office, Libreoffice, OpenOffice; Adobe Photoshop, Matlab, DrWeb antivirus.

Разработчик: Сёмочкина О.А., кандидат педагогических наук, доцент

## **11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ**

**Утверждение изменений в рабочей программе дисциплины для реализации в 2025/2026 уч. г.**

Рабочая программа дисциплины пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2025/2026 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «21» мая 2025 г.).