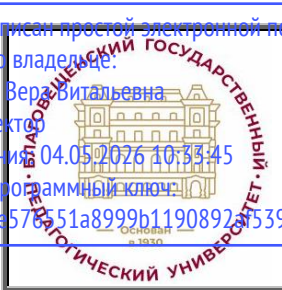


Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Щёкина Вера Битальевна  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 04.05.2026 10:55:45  
Уникальный программный ключ:  
a2232a55157e576551a8999b1190892af53989420420336ffbf573a434e57789

	<b>МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ</b>
	<b>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»</b>
<b>ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА Рабочая программа дисциплины</b>	

**УТВЕРЖДАЮ**

**декан факультета**

**физико-математического**

**образования и технологии**

**ФГБОУ ВО «БГПУ»**

 **Н.В.Слесаренко**

**«03» сентября 2024 г.**

**Рабочая программа дисциплины  
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

**Направление подготовки  
44.03.05 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ  
(с двумя профилями подготовки)**

**Профиль  
«ИНФОРМАТИКА»**

**Профиль  
«МАТЕМАТИКА»**

**Уровень высшего образования  
БАКАЛАВРИАТ**

**Принята  
на заседании кафедры физического и  
математического образования  
(протокол № 9 от «24» мая 2024 г.)**

**Благовещенск 2024**

**СОДЕРЖАНИЕ**

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА .....	3
2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ .....	4
3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ).....	5
4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ.....	5
5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....	6
6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА.....	13
7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ.....	20
8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ .....	20
9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ .....	20
10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА .....	22
11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ.....	23

## 1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

**1.1 Цель дисциплины:** овладение классическими методами математики, как общенаучными; формирование систематических знаний основных определений, теорем, теорий из курса математики, алгоритмов и методов решения математических задач и задач, связанных с математическим моделированием; научное обоснование теорем, предложений и методов математики; изучение роли и места дисциплины в системе математических и естественных наук; формирование умений описывать математическим языком реальные физические процессы при решении задач.

**1.2 Место дисциплины в структуре ООП:** Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» относится к дисциплинам предметного модуля по математике части, формируемой участниками образовательных отношений блока Б1 (Б1.В.01.06).

Дисциплина «Дополнительные главы математического анализа» органично продолжает изучение математики, расширяет и углубляет математические знания студентов, развивает их умения, навыки решать математические и физические задачи.

**1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: ПК-2:**

- **ПК-2.** Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования; **индикатором** достижения которой является:

- ПК-2.1 Знает концептуальные и теоретические основы профильных предметов, их место в системе наук и ценностей, историю развития и современное состояние.
- ПК-2.2 Владеет основными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов.

**1.4 Перечень планируемых результатов обучения.** В результате изучения дисциплины студент должен

- **знать:**

- основные понятия, теоремы и методы теории функций нескольких переменных: понятия: функции 2-х, 3-х переменных, области определения, множества значений, графика функции 2-х переменных, линии уровня, поверхности уровня, предела функции, непрерывности функции в точке, частной производной первого и высших порядков, дифференциала первого и высших порядков, экстремума функции 2-х переменных, производной по направлению, градиента, экстремума функции 2-х переменных, двойного и тройного интегралов, криволинейных интегралов I и II рода; свойства предела функции и функций, непрерывных в точке; уравнение касательной плоскости и нормали, алгоритмы нахождения производных высших порядков; алгоритмы нахождения экстремума функций двух переменных, наибольшего и наименьшего значений функции на компакте; свойства двойного и тройного интегралов, криволинейных интегралов I и II рода, методы их вычисления; алгоритм восстановления функции с помощью полного дифференциала;

- **уметь:**

- находить и строить на чертеже область определения функции 2-х, 3-х переменных, вычислять пределы функции 2-х переменных, исследовать непрерывность функции 2-х переменных в точке,
- находить частные производные, дифференциалы,
- составлять уравнение касательной плоскости, нормали,
- исследовать экстремум функции 2-х переменных,
- находить наибольшее и наименьшее значения функции 2-х переменных на компакте,
- вычислять двойные, тройные, криволинейные интегралы,
- восстанавливать функцию с помощью криволинейного интеграла II рода;

- **владеть:** умениями

- находить область определения функции 2-х переменных, находить пределы функции 2-х переменных, применяя полярные координаты,

- находить частные производные,
- исследовать экстремум функции 2-х переменных,
- находить наибольшее и наименьшее значения на компакте,
- строить область интегрирования, вычислять повторные интегралы, двойные, криволинейные II рода.

**1.5 Общая трудоемкость дисциплины** «Дополнительные главы математического анализа» составляет 2 зачетные единицы (далее – ЗЕ) (72 часа):

Программа предусматривает изучение материала на лекциях и практических занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

### 1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

#### Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 5
Общая трудоемкость	72	72
Аудиторные занятия	36	36
Лекции	14	14
Практические занятия	22	22
Самостоятельная работа	36	36
Вид итогового контроля	-	зачет

## 2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

### 2.1 Очная форма обучения

#### Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
1.	Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	36	8	12	16
2.	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	36	6	10	20
Зачет					
<b>ИТОГО</b>		<b>72</b>	<b>14</b>	<b>22</b>	<b>36</b>

### Интерактивное обучение по дисциплине

№	Наименование тем (разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Практическое занятие	Работа в парах, по группам, индивидуальная работа студента с отчетом преподавателю	4,5
2.	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	Практическое занятие	Работа в парах, по группам	2
<b>ИТОГО</b>				<b>6,5</b>

### 3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

#### **Тема 1. Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**

Понятие функций 2-х, 3-х переменных. График функции двух переменных. Предел и непрерывность функций 2-х, 3-х переменных. Частные производные функций нескольких переменных, их геометрический смысл. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Дифференциал и дифференцируемость функции нескольких переменных; геометрический смысл полного дифференциала. Дифференцируемость сложной функции, инвариантность формы записи полного дифференциала. Дифференцирование неявно заданных функций. Производная по направлению; градиент; производные и дифференциалы высших порядков. Экстремум функции нескольких переменных.

#### **Тема 2. Интегральное исчисление функций нескольких переменных**

Двойной интеграл, его свойства, методы вычисления, применения в геометрии. Тройной интеграл, его свойства, методы вычисления, применения в геометрии. Криволинейные интегралы I и II рода, их свойства, методы вычисления, некоторые применения.

### 4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Данные рекомендации предназначены для студентов физико-математического факультета направления подготовки бакалавра «44.03.05 Педагогическое образование» профиль «Математика», профиль «Информатика».

Процесс обучения указанной дисциплине преследует следующие цели:

- ознакомить студентов с основными понятиями теории функций нескольких действительных переменных, методами решения задач, относящимися к этому разделу математического анализа,
- научно обосновать теоремы и предложения курса,
- в комплексе с другими математическими дисциплинами продолжить развитие математической культуры логических рассуждений и правильной устной и письменной математической речи.

В результате изучения дисциплины студент **должен иметь представление** о месте и роли теории функций нескольких переменных в математическом анализе, в истории науки, в современной математике, об использовании методов математического анализа в физике и других естественных науках; **должен знать** основные понятия, теоремы курса, виды моделей и способы их построения, предлагаемые этой дисциплиной, методы решения

основных типов задач; **должен уметь** находить область определения функций 2-х и 3-х переменных, строить её на чертеже, вычислять пределы функций нескольких переменных, дифференцировать, интегрировать функции нескольких переменных.

Теоретический материал курса представлен планом лекционных занятий с указанием вопросов, рассматриваемых на каждой лекции.

Учебно-методические материалы по подготовке практических занятий содержат планы проведения занятий с указанием последовательности рассматриваемых тем, задания для решения в группе и задания для самостоятельной работы.

В рабочей программе представлен примерный вариант контрольных и самостоятельных работ, которые позволяют проверить уровень усвоения изученного материала.

Рабочая программа содержит программу зачета, которая позволяет наиболее эффективно организовать подготовку к нему. При подготовке к занятиям и зачету студенты могут использовать литературу, приведенную в рабочей программе.

Подготовку к зачету наиболее рационально осуществлять путем повторения и систематизации курса с помощью кратких конспектов. При работе с теоретическим материалом студент должен уяснить наиболее важные идеи каждой темы, уметь пользоваться основными понятиями и утверждениями (знать их формулировки, демонстрировать их использование на примерах, понимать условия применения и т.д.). Как правило, каждая тема, изученная в рамках курса, содержит ряд основных задач, приемами и методами решения которых должен владеть студент.

Изучать материал рекомендуется по плану, представленному в плане лекций (см. выше). После изучения теоретических основ каждой темы рекомендуется выполнить задания из практического занятия.

#### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
1.	Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	Домашнее задание Контрольная работа Подготовка к зачёту	16
2.	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	Домашнее задание Подготовка к зачёту	20
	<b>ИТОГО</b>		<b>36</b>

### **5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

**Тема 1. Функции нескольких переменных: предел и непрерывность. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных**

**Практическое занятие 1. Функции 2-х, 3-х переменных: область определения, график, линии уровня, поверхности уровня. Предел и непрерывность функции двух переменных**

1. Дана функция  $f(x; y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}$ . Найдите:  $f(-4; 2)$ ,  $f\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$ ,  $f\left(\frac{1}{x}; \frac{1}{y}\right)$ ,  $f(-x; -y)$ ,  $f(y; x)$ ,  $\frac{1}{f(x; y)}$ .

2. Найдите и изобразите на плоскости области определения следующих функций:

1)  $z = \sqrt{1 + \sqrt{-(x+y)^2}}$ ,      2)  $z = x + \arccos y$ ,      3)  $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$ .

3. Изобразите на плоскости линии уровня функции  $z = x^2 - y^2$ .

4. Изобразите в пространстве поверхности уровня функции  $u = x^2 + y^2 + z^2$ .

5. Найдите пределы следующих функций или покажите, что они не существуют.

1)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x - y^2) \cdot \sin \frac{1}{x+y} \cdot \cos \frac{x}{x-y}$ ;      2)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{2 \cdot (x-1) \cdot (y-2)}{(x-1)^2 + (y-2)^2}$ ;      3)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -1}} \frac{\operatorname{tg}(x+y) \cdot e^{x-y}}{x^2 - y^2}$ ;

4)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\sin x (y^2 + 2y - 4)}{x(y^2 + 2)}$ ;      5)  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}$ ,      6)  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}$ ;

7)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \cdot \sin^3 \frac{1}{xy}$ ,      8)  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow -2}} \frac{(x-1)^5 (y+2)}{(x-1)^2 + (y+2)^2}$ .

6. Исследовать на непрерывность функцию  $f(x; y) = \begin{cases} (x+y) \cdot \arccos \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x; y) \neq (0; 0), \\ 0, & (x; y) = (0; 0) \end{cases}$  в

точке  $O(0; 0)$ .

7. Функция  $f(x; y) = \frac{(x-1)(y-1)^2}{(x-1)(y-1)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2}$  не определена в точке  $M_0(1; 1)$ . Можно

ли в этой точке функцию определить так, чтобы она стала непрерывной?

Работа в парах: нахождение области определения функций.

### Практическое занятие 2. Частные производные функции. Полный дифференциал функции и его геометрический смысл

1. Найдите частные и полное приращения функции  $z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$  в точке  $M_0(2; 1)$  и при данных приращениях аргументов:  $\Delta x = 0,1$ ,  $\Delta y = 0,2$ .

2. Найдите частные и полное приращения функции  $z = \lg(x^2 + y^2)$  в точке  $M_0(2; 1)$  при переходе от точки  $M_0(2; 1)$  к точке  $M_1(2,1; 0,9)$ .

3. Найдите частные производные и полный дифференциал следующих функций:

1)  $z = e^{x^2 + y^2}$ ;    2)  $u = t^5 \sin^3 z$ ;    3)  $f(x; y; z) = x^y + (xy)^z + z^{xy}$ ;    4)  $v = \frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$ .

4. Вычислите приближенно значения:

1)  $1,04^{2,03}$ ;    2)  $\sqrt{(1,04)^2 + (3,01)^2}$ ;    3)  $\sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ$ .

Работа в парах: нахождение частных производных функций.

### Практическое занятие 3. Дифференцирование сложной и неявно заданной функций. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1. Найдите производную  $\frac{dz}{dt}$ , если      1)  $z = x^2 + y^2 + xy$ ,  $x = 2 \sin t$ ,  $y = 3 \cos t$ ;

$$2) z = \cos(2t + 4x^2 - y), x = \frac{1}{t}, y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}; \quad 3) z = x^2 y^3 u, x = t, y = t^2, u = \sin t.$$

2. Найдите частные производные  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$  и полный дифференциал  $dz$ , если

$$1) z = x^3 + y^3, \text{ где } x = uv, y = \frac{u}{v}; \quad 2) z = \sqrt{x^2 - y^2}, \text{ где } x = u^v, y = u \ln v;$$

$$3) z = \operatorname{arctg} xy, \text{ где } x = \sqrt{u^2 + v^2}, y = u - v.$$

3. Найдите производную  $y'(x)$  неявно заданной функции:

$$1) xe^{2y} - y \ln x = 8; \quad 2) \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

4. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой, заданной неявно уравнением  $F(x; y) = 0$  в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

$$1) x^3 y - y^3 x = 6, M_0(2; 1); \quad 2) x^2 y^2 - x^4 - y^4 + 13 = 0, M_0(2; 1).$$

5. Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14$  в точке  $P_0(1; 1; -1)$ .

6. К поверхности  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  проведите касательные плоскости, параллельные плоскости  $x + 4y + 6z = 0$ .

Работа в парах: решение задач.

#### Практическое занятие 4. Производная по направлению. Градиент.

##### Частные производные и дифференциалы высших порядков.

1. Найдите дифференциалы  $dz$  и  $d^2z$  для следующих функций:

$$1) z = \sin x \cdot \sin y, \quad 2) z = 4x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 - y^3, \quad 3) z = \ln(\operatorname{tg}(x + y)).$$

2. Найдите производную функции  $z = x^2 - y^2$  в точке  $M(1; 1)$  в направлении, составляющем с осью  $Ox$  угол  $60^\circ$ . Определить направление максимального роста функции в точке  $M$ .

3. Даны: функция  $z = \frac{x}{y}$ , точка  $A(1; 1)$  и вектор  $\vec{a} = (4; -3)$ . Найдите: 1)  $\overline{\operatorname{grad}}z(A)$ , 2)  $\frac{\partial z}{\partial a}(A)$

4. Найдите производную функции  $z = 1 - \left( \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{64} \right)$  в точке  $B(-2; 6)$  в направлении к точке  $C(0; 8)$ .

5. Найдите направление максимального роста функции  $z = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2$  в точке  $A(2; 1)$ . Найдите наибольшее из значений производных по разным направлениям в точке  $A$ .

Работа в парах: решение задач.

#### Практическое занятие 5. Экстремум функции двух переменных. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на компакте

1. Найти экстремум функции  $z = xy^2(1 - x - y)$ .

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

а)  $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$  в замкнутой области, ограниченной прямыми  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $2x + 3y - 12 = 0$ ;

б)  $z = xy + y + x$  в квадрате, ограниченном прямыми  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2$ ,  $y = 3$ .

3. Дана система, состоящая из 6 точек, координаты, которых указаны в таблице

X	-1	0	1	2	3	4
---	----	---	---	---	---	---

Y	0	2	3	3,5	3	4,5
---	---	---	---	-----	---	-----

Требуется построить прямую с уравнением  $y = ax + b$  так, чтобы она отличалась как можно меньше от данной системы точек в смысле наименьших квадратов.

4. Из всех прямоугольников с заданной площадью найти такой, периметр, которого имеет наименьшее значение.

Работа по группам: решение задач с докладом у доски.

### Практическое занятие 6. Контрольная работа «Дифференцирование функций нескольких действительных переменных»

Индивидуальная работа студента с отчетом преподавателю

0 вариант

1. Найти полный дифференциал функции  $f(x; y) = \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}$ .
2. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = \sin \frac{y}{x}$  в точке  $(1, \pi, 0)$ .
3. Найти производную неявно заданной функции  $e^y + ax^2 e^{-y} - 2bx = 0$ .
4. Найти производную функции  $z = x^4 + 3x^3 y + 9x^2 y - 8xy^2 + 5y^3$  в точке  $A(1, 1)$  по направлению вектора  $\vec{a} = (1, 1)$ .
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $u = 1 + x + 2y$  на компакте  $K = \{(x; y): x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .
6. Исследовать условный экстремум функции  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при условии связи  $x + y = 2a$ ,  $a > 0$ .

### Литература

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для ст-тов пед. Вузов / И.И. Баврин. – М.: Высш. Шк., 2006. – 326 с.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век. Изд-во «Мир и образование», 2005. – 415 с.
3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель, 2006. – 558 с.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2019. – 608 с.
5. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.2. / Г.М. Фихтенгольц. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 800 с.

### Тема 2. Интегральное исчисление функций нескольких переменных

#### Практическое занятие 1, 2. Двойной интеграл

1. Интегрируема ли функция  $f(x; y) = 1 - \frac{y^2}{x^2}$  в замкнутом круге  $B = \{(x; y): x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$ .
2. Пусть функция  $f(x; y)$  интегрируема на компакте  $\Phi$ . Записать двойной интеграл  $\iint_{\Phi} f(x; y) dx dy$  в виде повторных с разным порядком интегрирования, где
  - а)  $\Phi$  – «правый» замкнутый полукруг с центром в точке  $O(0, 0)$  и радиуса  $r = 2$ ;

б)  $\Phi$  – квадратуемый компакт, ограниченный осью абсцисс, биссектрисой первого координатного угла и параболой с вершиной в точке  $A(1,1)$  и проходящей через начало координат.

3. Изменить порядок интегрирования: а)  $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x; y) dy$ , б)  $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x; y) dy$ .

4. Вычислить двойные интегралы, сводя их к повторному:

а)  $I = \iint_{\Phi} xy dx dy$ , где  $\Phi$  – квадратуемый компакт, являющийся замкнутым квадратом с вер-

шинами в точках  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $C(1,1)$ .

б)  $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , если замкнутая область  $D$  ограничена линиями  $y = x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$ .

в)  $I = \iint_D e^{x+\sin y} \cdot \cos y dx dy$ , если  $D$  – прямоугольник  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

г)  $I = \iint_D (3x^2 - 2xy + y) dx dy$ , если область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $x = y^2$ ,  $y = 2$ .

д)  $I = \iint_{\Phi} (x + y^2) dx dy$ , где  $\Phi = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\}$ .

е)  $\iint_{\Phi} \sqrt{x+y} dx dy$ , где  $\Phi$  – замкнутый треугольник с вершинами в точках  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$ ,

$B(0,1)$ . 1. 5. Переходя к полярным координатам, вычислите двойные интегралы:

1)  $\iint_{\Phi} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$ , где  $\Phi = \{(x; y) : 4x \leq x^2 + y^2 \leq 8x, x \leq y \leq 2x\}$ ;

2)  $\iint_{\Phi} (x^2 - y^2) dx dy$ , где  $\Phi = \{(x; y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$ .

6. Заменяя переменные, вычислите двойные интегралы:

1)  $I = \iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 dx dy$ , если  $D$  – квадрат, ограниченный прямыми  $x+y=1$ ,  $x-y=\pm 1$ ,  $x+y=3$ ;

2)  $I = \iint_D dx dy$ , если область  $D$  ограничена линиями  $xy=1$ ,  $xy=2$ ,  $y=x$ ,  $y=3x$ ;

3)  $I = \iint_{\Phi} (x^2 - y^2)^2 (x+y) dx dy$ , где  $\Phi = \{(x; y) : 1 \leq x+y \leq 3, |x-y| \leq 1\}$ ;

4)  $\iint_{\Phi} \frac{dx dy}{y}$ , где  $\Phi = \{(x; y) : x \leq y \leq 2x, \frac{2-x}{2} \leq y \leq 2 \cdot (2-x)\}$ ;

5)  $\iint_{\Phi} \left(\frac{y}{x}\right)^3 dx dy$ , где  $\Phi = \{(x; y) : 1 \leq xy \leq 2, x \leq y^2 \leq 2x\}$ .

Работа по группам: вычисление двойных интегралов разными способами.

### Практическое занятие 3. Тройной интеграл

1. Различными способами расставьте пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz.$$

2. Вычислите тройной интеграл  $\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , где  $T$  – прямоугольный параллелепипед, заданный неравенствами  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 3$ .
3. Вычислите тройной интеграл  $\iiint_T dx dy dz$ , где  $T$  – шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ .
4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями  
 а)  $x^2 + y^2 = 8$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ,  $x + y + z = 4$ ; б)  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = x^2 + y^2$ .
- Работа по группам: вычисление тройных интегралов разными способами.

#### Практическое занятие 4. Криволинейный интеграл I и II рода

1. Вычислите криволинейные интегралы I рода:
- 1)  $\int_C (x^2 + y^3) dl$ , где  $C$  – контур треугольника с вершинами  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $O(0; 0)$ ;
  - 2)  $\int_C x \cdot y dl$ , где  $C$  – контур квадрата  $|x| + |y| = 2$ ;
  - 3)  $\int_L y dl$ , где  $L$  – дуга циклоиды  $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ ;
  - 4)  $\int_C \left( x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}} \right) dl$ , где  $C$  – дуга астроида  $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ ;
  - 5)  $\int_\gamma \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , где  $\gamma$  – окружность  $x^2 + y^2 = 16$ .
2. Вычислите длину дуги кривой  $x = 3t$ ,  $y = 3t^2$  от точки  $O(0; 0)$  до точки  $A(3; 3)$ .
3. Вычислите криволинейные интегралы II рода:
- а)  $\int_{AB} (x^2 - 2xy) dx + (2xy + y^2) dy$ , где  $AB$  – дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $A(1; 1)$  до точки  $B(2; 4)$ ;
  - б)  $\int_C (2 - y) dx + x dy$ , где  $C$  – дуга первой арки циклоиды  $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$ , пробегаемая в направлении возрастания параметра;
  - в)  $\int_\Gamma \frac{(x + y) dx - (x - y) dy}{x^2 + y^2}$ , где  $\Gamma$  – окружность  $x^2 + y^2 = 25$ , пробегаемая против часовой стрелки.
4. Вычислите  $I = \int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} (x + y) dx + (x - y) dy$  по различным контурам, соединяющим точки  $O(0, 0)$  и  $M(\pi, \pi)$
- 1) по прямой  $OM$ , 2) по кривой  $y = x + \sin x$ , 3) по ломанной  $OPM$ ,  $P(\pi, 0)$ , 4) по параболе  $y = \frac{x^2}{\pi}$ .
5. Вычислите  $I = \int_K y dx + 2x dy$ , где  $K$  пробегаемый против часовой стрелки контур ромба, стороны которого лежат на прямых  $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1$ ,  $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1$ .

6. Вычислите  $\oint_K xdy + ydx$  по замкнутым контурам: 1) по окружности  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$   
 $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  
 2) по контуру, ограниченному дугой параболы  $y = x^2$  и отрезку прямой  $y = 1$ .
7. Вычислите  $I = \int_K ydx - (y + x^2)dy$ , если  $K$  – дуга параболы  $y = 2x - x^2$ , расположенная над осью  $Ox$  и пробегаемая по ходу часовой стрелки.
8. С помощью формулы Грина преобразуйте криволинейный интеграл  $\oint_C (x + \ln(x^2 + y^2))dx + y \ln(x^2 + y^2)dy$ ,  $C$  – контур, ограничивающий область  $D$ . Вычислите этот интеграл, если  $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
9. Применяя формулу Грина, вычислите криволинейный интеграл  $I = \oint_C (-x^2 y)dx + xy^2 dy$ , где  $C$  – окружность  $x^2 + y^2 = 64$ , пробегаемая против часовой стрелки.
10. Вычислите площадь фигуры, ограниченной  
 1) эллипсом  $x = 3\cos t$ ,  $y = \sin t$ , 2) кардиоидой  $x = 2\cos t - \cos 2t$ ,  
 $y = 2\sin t - \sin 2t$ .

Работа в парах: решение задач.

### Практическое занятие 5. Независимость криволинейного интеграла от пути интегрирования. Восстановление функции по её полному дифференциалу

1. Найдите первообразную функцию  $U(x, y)$ , если

1)  $dU = (x^2 - 2xy^2 + 3)dx + (y^2 - 2x^2y + 3)dy$ ; 2)  
 $du = e^{x-y}((1+x+y)dx + (1-x-y)dy)$ .

2. Найдя первообразные функции, вычислите интеграл  $\int_{(1;1)}^{(3;1)} \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$  (по пути, не пересекающему прямой  $y = -x$ ).

3. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_{(1;2)}^{(2;1)} \frac{ydx - xdy}{y^2}$  от выражения, являющегося полным дифференциалом по пути, не пересекающему оси абсцисс.

### Литература

1. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для ст-тов пед. Вузов / И.И. Баврин. – М.: Высш. Шк., 2006. – 326 с.
2. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС 21 век. Изд-во «Мир и образование», 2005. – 415 с.
3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель, 2006. – 558 с.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2019. – 608 с.

## 6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

### 6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
ПК-2	Домашнее задание	Низкий (неудовлетворительно)	Студент не выполнил домашнее задание или нет ни одной задачи, которую он решил правильно.
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент правильно решил и корректно обосновал ответ в 50 % задач, другие задачи не решены или решены с логическими ошибками, ошибками, свидетельствующими о незнании теоретического материала по теме.
		Базовый (хорошо)	Студент правильно решил и корректно обосновал ответ в 80 % задач, другие задачи не решены или решены ошибками.
		Высокий (отлично)	Студент правильно решил и грамотно обосновал ответы в задачах, предложенных для домашнего рассмотрения.
ПК-2	Контрольная работа	Низкий (неудовлетворительно)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений менее 60 %
		Пороговый (удовлетворительно)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений от 61-75 %
		Базовый (хорошо)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений от 76-84 %
		Высокий (отлично)	Количество правильно решённых задач и обоснованных решений от 85-100 %

### 6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

#### Критерии оценивания устного ответа на зачете

Оценка «зачтено» выставляется студенту, если:

- вопросы раскрыты, изложены логично, без существенных ошибок, показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, продемонстрировано усвоение ранее изученных вопросов, сформированность компетенций, устойчивость используемых умений и навыков. Допускаются незначительные ошибки.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, если:

- не раскрыто основное содержание учебного материала; обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов; не сформированы компетенции, умения и навыки.

### 6.3 Оценочные средства для проверки уровня сформированности компетенции ПК-2

Тест содержит следующие типы заданий

Тип задания	№ задания	Вес задания (балл)	Результат оценивания (баллы, полученные за выполнение задания / характеристика правильности ответа)
задания закрытого типа с выбором одного правильного (1 из 4)	1, 2, 3, 5	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором одного правильного ответа по схеме: «верно»/ «неверно»	4	1 балл	1 б - полное правильное соответствие; 0 б - остальные случаи
задания закрытого типа с выбором нескольких правильных ответов (3 из 6)	6, 7	2 балла	2 б – полное правильное соответствие (последовательность вариантов ответа может быть любой); 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задания закрытого типа на установление соответствия (4 на 4)	8, 9	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задание закрытого типа на установление последовательности	10, 11	2 балла	2 б – полное правильное соответствие; 1 б – если допущена одна ошибка / ответ правильный, но не полный; 0 б – остальные случаи
задания открытого типа с кратким ответом	12, 13,	3 балла	3 б – полное правильное соответствие; 0 б – остальные случаи.
задания открытого типа с развернутым ответом	14, 15	5 баллов	5 б – полное правильное соответствие; если допущена одна ошибка/неточность / ответ правильный, но не полный - 3 балла; если допущено более одной ошибки / ответ неправильный / ответ отсутствует – 0 баллов

Формируемая компетенция	Индикаторы сформированности компетенции
<b>ПК-2.</b> Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования	<b>ПК-2.1</b> Знает концептуальные и теоретические основы профильных предметов, их место в системе наук и ценностей, историю развития и современное состояние. <b>ПК-2.2</b> Владеет основными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов.

Задание 1. Прочитайте текст задачи: «Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = \sin \frac{y}{x}$  в точке  $(1, \pi, 0)$ ». Вспомнив теоретический материал, отметьте правильно записанное уравнение касательной плоскости к поверхности.

$$1) z = z_0 + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0),$$

$$2) z = z_0 - \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) - \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0),$$

$$3) \frac{x - x_0}{z'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1},$$

$$4) z = z_0 + z'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Ответ: 1.

Задание 2. Прочитайте текст задачи: «Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = \sin \frac{y}{x}$  в точке  $(1, \pi, 0)$ ». Вспомнив теоретический материал, отметьте правильно записанное уравнение нормали к поверхности.

$$1) z = z_0 + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0),$$

$$2) z = z_0 - \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) - \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0),$$

$$3) \frac{x - x_0}{z'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1},$$

$$4) z = z_0 - \frac{1}{z'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

Ответ: 3.

Задание 3. Прочитав условие задачи «Найдите производную функции  $z = x^4 + 3x^3y + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3$  в точке  $A(1, 1)$  по направлению вектора  $\vec{a} = (1, 1)$ », отметьте правильную формулу для нахождения производной по направлению.

$$1) \frac{\partial z}{\partial l}(x_0; y_0) = \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot \sin \alpha + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot \sin \beta, \text{ где } \sin \alpha, \sin \beta - \text{ направляющие косинусы прямой } l,$$

$$2) \frac{\partial z}{\partial l}(x_0; y_0) = \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot \cos \beta, \text{ где } \cos \alpha, \cos \beta - \text{ направляющие косинусы прямой } l,$$

$$3) \frac{\partial z}{\partial l}(x_0; y_0) = \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y},$$

$$4) \frac{\partial z}{\partial l}(x_0; y_0) = \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot \cos \alpha - \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot \cos \beta, \text{ где } \cos \alpha, \cos \beta - \text{ направляющие косинусы прямой } l,$$

Ответ: 2.

Задание 4. Прочитайте алгоритм исследования функции двух переменных на экстремум:

1) найдите область определения  $D(f)$  функции  $z = f(x, y)$ ,

2) найдите частные производные функции двух переменных  $\frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,

3) найдите частные производные второго порядка функции двух переменных  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

4) приравняв частные производные функции двух переменных к нулю, составьте и решите

систему уравнений: 
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

5) проверьте достаточные условия существования экстремума функции двух переменных в точках подозрительных на экстремум,

б) запишите ответ.

Верно ли сформулирован алгоритм?

Ответ: верно.

Задание 5. В чём заключается условие независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования?

1) функции  $P(x; y)$ ,  $Q(x; y)$  - непрерывны в области  $D$ ,

2) выполняется равенство:  $P(x; y) = Q(x; y)$  в каждой точке области  $D$ ,

3) функции  $P(x; y)$ ,  $Q(x; y)$  - интегрируемы в области  $D$ ,

4) в каждой точке области  $D$  выполняется равенство:  $\frac{\partial P(x; y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x; y)}{\partial x}$ .

Ответ: 4.

Задание 6. Отметьте способы вычисления двойного интеграла:

1) 
$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b f(x; y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

2) 
$$\iint_D f(x; y) dx dy = \iint_G f(x(u; v); y(u; v)) \cdot |I| du dv,$$
  $I$  – якобиан преобразования,  $G$  – образ области  $D$  в новых координатах,

3) 
$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy,$$
 где функции  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  - непрерывны на отрезке  $[a; b]$

,

4) 
$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_\alpha^\beta f(x(t)) \cdot x'(t) dt,$$

5) 
$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x; y) dx,$$
 где функции  $x_1(y)$ ,  $x_2(y)$  - непрерывны на отрезке  $[c; d]$

,

6) 
$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_\alpha^\beta f(x(\varphi); y(\varphi)) \cdot \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi.$$

Ответ: 2, 3, 5.

Задание 7. Отметьте формулы для вычисления криволинейного интеграла II рода

- 1)  $\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t); y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t); y(t)) \cdot y'(t))dt$ , где  $x(t), y(t), \alpha \leq t \leq \beta$  - параметризация гладкой кривой  $AB$ ,
- 2)  $\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x; y)dx$ , где функции  $x_1(y), x_2(y)$  - непрерывны на отрезке  $[c; d]$ ,
- 3)  $\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_a^b P(x; y(x)) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ ,  $y = y(x), a \leq x \leq b$  - задание гладкой кривой  $AB$ ,
- 4)  $\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_a^b (P(x; y(x)) + Q(x; y(x)) \cdot y'(x))dx$ , где  $y = y(x), a \leq x \leq b$  - задание гладкой кривой  $AB$ ,
- 5)  $\int_{AB} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(\varphi); y(\varphi)) \cdot \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi$ , где  $x(\varphi), y(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$  - параметризация гладкой кривой  $AB$ ,
- 6)  $\int_C P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x; y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x; y) \right) \cdot dx dy$ , где  $C$  - кусочно гладкий контур в области  $D$ , функции  $P(x; y)$  и  $Q(x; y)$  - непрерывны, дифференцируемы и имеют непрерывные частные производные в области  $D$ .
- Ответ: 1, 4, 6.

Задание 8. Установите соответствие между функциями и областями определения функций:

А) $z = \sin \frac{x}{y}$	1) $D(z) = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq -x\}$
Б) $z = \ln \frac{x}{y}$	2) $D(z) = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0, y > 0\} \cup \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : x < 0, y < 0\}$
В) $z = \sqrt{x + y}$	3) $D(z) = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : y \neq 0\}$
Г) $z = \sqrt{x^2 - y^2}$	4) $D(z) = \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq x, y \geq -x\} \cup \{(x; y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq -x, y \geq x\}$

Ответ:

А	Б	В	Г
3	2	1	4

Задание 9. Установите соответствие:

А) наибольшее значение производной по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ равно ...	1) $\frac{\partial z}{\partial l}(x_0; y_0) = \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot \cos \alpha + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot \cos \beta$ , где $\cos \alpha, \cos \beta$ - направляющие косинусы прямой $l$ ,
Б) значение производной по направлению вычисляется по формуле ...	2) $-\left  \vec{\text{grad}} f(M_0) \right $

В) производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ равна нулю при условии ...	3) $\left  \vec{\text{grad}} f(M_0) \right $
Г) наименьшее значение производной по направлению $\frac{\partial f}{\partial l}(M_0)$ равно ...	4) угол между $\vec{\text{grad}} f(M_0)$ и прямой $l$ равен $90^\circ$

Ответ:

А	Б	В	Г
3	1	4	2

Задание 10. Установите в правильной последовательности пункты алгоритма составления уравнения касательной плоскости к поверхности  $z = f(x; y)$  в точке  $M_0(x_0; y_0)$ :

- 1) подставить координаты точки  $M_0(x_0; y_0)$  в частные производные первого порядка,
- 2) найти значение функции в точке  $M_0(x_0; y_0)$ ,
- 3) составить уравнение касательной плоскости по формуле  $z = f(x_0; y_0) + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial z(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot (y - y_0)$ ,
- 4) найти частные производные функции  $z = f(x; y)$ ,
- 5) упростить уравнение касательной плоскости, приведя его к общему уравнению плоскости.

Ответ: 24135.

Задание 11. Установите последовательность в алгоритме нахождения наибольшего и наименьшего значений функции  $z = f(x; y)$  на компакте  $D$ :

- 1) найти частные производные функции  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ,
- 2) исследовать функцию на условный экстремум на границе компакта  $\partial D$ ,
- 3) найти область определения функции  $z = f(x; y)$ ,
- 4) приравняв частные производные функции к нулю, составьте и решите систему уравне-

$$\text{ний: } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \end{cases} \text{ получив точки подозрительные на экстремум,}$$

- 5) установить: содержится ли компакт  $D$  в области определения функции,
- 6) выбрать из значений функции в экстремальных точках и точках условного экстремума наибольшее и наименьшее значения функции на компакте.
- 7) если компакт  $D$  не содержится в области определения функции, то задача не имеет решения, если же компакт  $D$  содержится в области определения функции, то продолжить решение задачи,
- 8) найти значения функции в точках, подозрительных на экстремум.

Ответ: 35714826.

Задание 12. Вычислите двойной интеграл  $I = \iint_D dx dy$ , если  $D$  – параллелограмм со сторонами, лежащими на прямых  $y = x$ ,  $y = x + 3$ ,  $y = 1 - 2x$ ,  $y = 5 - 2x$ . В ответ запишите число  $3I$ .

Ответ: 8.

Задание 13. Используя геометрический смысл полного дифференциала функции, вычислите приближённо значение  $\ln\left((0,09)^3 + (0,99)^3\right)$ .

Ответ:  $-0,03$ .

Задание 14. Найдите полный дифференциал функции  $v(x; y) = x^2 - y^3$  в точке  $M(1; -4)$ .

Ответ:  $dv(M) = 2dx - 48dy$ , или  $dv = 2dx - 48dy$ , или  $2dx - 48dy$ .

Задание 15. Каким способом: через параметризацию кривой или по формуле Грина рациональнее вычислить криволинейный интеграл II рода:  $I = \oint_L (2x + 3y)dx + (3x - 4y)dy$ , где кривая

$L$  состоит из дуги параболы  $y = x^2$ , соединяющей точки  $O(0; 0)$  и  $A(2; 4)$ , и отрезка прямой, соединяющей эти же точки.

Ответ: по формуле Грина.

#### 6.4 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

##### Контрольная работа «Дифференцирование функций нескольких действительных переменных»

0 вариант

1. Найти полный дифференциал функции  $f(x; y) = \sqrt[3]{\sin^4 x + \cos^4 y}$ .
2. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности  $z = \sin \frac{y}{x}$  в точке  $(1, \pi, 0)$ .
3. Найти производную неявно заданной функции  $e^y + ax^2 e^{-y} - 2bx = 0$ .
4. Найти производную функции  $z = x^4 + 3x^3 y + 9x^2 y - 8xy^2 + 5y^3$  в точке  $A(1, 1)$  по направлению вектора  $\vec{a} = (1, 1)$ .
5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $u = 1 + x + 2y$  на компакте  $K = \{(x; y): x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .
6. Исследовать условный экстремум функции  $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  при условии связи  $x + y = 2a$ ,  $a > 0$ .

#### Программа зачёта

##### I. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

1. Множества в пространствах  $\mathbf{R}^2$  и  $\mathbf{R}^3$ .
2. Понятие функции нескольких переменных. График функции двух переменных. Линии уровня. Поверхности уровня.
3. Предел функции 2-х и 3-х переменных, методы вычисления.
4. Непрерывность функции 2-х и 3-х переменных.
5. Частные производные функций нескольких переменных, их геометрический смысл.
6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
7. Дифференциал и дифференцируемость функции нескольких переменных; геометрический смысл полного дифференциала.
8. Дифференцируемость сложной функции, инвариантность формы записи полного дифференциала.
9. Дифференцирование неявно заданных функций.
10. Производная по направлению; градиент.
11. Производные и дифференциалы высших порядков.

12. Экстремум функции нескольких переменных.

## **II. Интегральное исчисление функций нескольких переменных**

1. Двойной интеграл, его геометрический смысл и свойства.
2. Необходимое и достаточное условия существования двойного интеграла.
3. Методы вычисления двойного интеграла (через повторный интеграл, замена переменных в двойном интеграле).
4. Тройной интеграл, его геометрический смысл и свойства.
5. Методы вычисления тройного интеграла (через повторный интеграл, замена переменных в двойном интеграле).
6. Криволинейные интегралы I рода, их свойства.
7. Методы вычисления криволинейного интеграла I рода.
8. Криволинейные интегралы II рода, их свойства.
9. Вычисление криволинейного интеграла II рода через определенный интеграл.
10. Формула Грина.
11. Восстановление функции по её полному дифференциалу.

## **7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ**

**Информационные технологии** – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- Электронные библиотечные системы;
- Мультимедийное сопровождение лекций и практических занятий.

## **8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ**

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

## **9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ**

### **9.1 Литература**

1. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу: учебник для ст-тов вузов / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М.: Дрофа, 2003. – 638 с. (8 экз.)
2. Баврин, И.И. Математический анализ: учебник для ст-тов пед. вузов / И.И. Баврин. – М.: Высш. шк., 2006. – 326 с. (16 экз.)
3. Бугров, Я.С. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов, обучающихся по инженерно-технич. спец. В 3 т. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления. / Я.С. Бугров. – М.: Дрофа. – Высшее образование. – (Современный учебник), 2004. – 509 с. (31 экз.)

4. Бугров, Я.С. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов, обучающихся по инженерно-технич. спец. В 3 т. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. / Я.С. Бугров. – М.: Дрофа. – Высшее образование. – (Современный учебник), 2004. – 511 с. (32 экз.)
5. Вся высшая математика: учебник для ст-тов вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренков и др. Т.2. – М.: УРСС, 2004. – 187 с. (20 экз.)
6. Вся высшая математика: учебник для ст-тов вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренков и др. Т.3. – М.: УРСС, 2005. – 237 с. (2 экз.)
7. Вся высшая математика: учебник для ст-тов вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренков и др. Т.4. – М.: УРСС, 2001. – 348 с. (6 экз.)
8. Гаврилов, В.Р. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. / В.Р. Гаврилов, Е.Е. Иванова, В.Д. Морозова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2003. – 496 с. (10 экз.)
9. Гусак, А.А. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов. В 2 т. Т.1. / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 544 с. (8 экз.)
10. Гусак, А.А. Высшая математика: учебник для ст-тов вузов. В 2 т. Т.2. / А.А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – 447 с. (8 экз.)
11. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. – В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС21век. Изд-во «Мир и образование», 2005.–415 с. (16 экз.)
12. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М.: Изд-во АСТ – Астрель, 2006. – 558 с. (50 экз.)
13. Ильин, В.А. Математический анализ: учеб. для вузов В 2 ч. Ч. 1. / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл. Х. Сендов; под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Наука, 1979. – 719 с. (12 экз.)
14. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник. В 2-х т. Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. / Л.Д. Кудрявцев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 424 с. (54 экз.)
15. Лунгу, К.Н. Высшая математика руководство к решению задач: учеб. пособие для студ. вузов / К.Н. Лунгу, Е.В. Макаров; под ред. В.Д. Кулиева. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 212 с. (15 экз.)
16. Никольский, С.М. Элементы математического анализа. / С.М. Никольский. – М.: Дрофа, 2002. – 272 с. (21 экз.)
17. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 608 с. (16 экз.)
18. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. – В 2-х ч. Ч.1. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.; М.; Краснодар: Изд-во «Лань», 2006. – 440 с. (17 экз.)
19. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. – В 2-х ч. Ч.2. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.; М.; Краснодар: Изд-во «Лань», 2006. – 463 с. (18 экз.)
20. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.1. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Изд-во «Лань», 1997. – 608 с. (4 экз.)
21. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.2. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Изд-во «Лань», 1997. – 800 с. (4 экз.)
22. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – В 3-х т. Т.3. / Г.М. Фихтенгольц. – СПб.: Изд-во «Лань», 1997. – 672 с. (4 экз.)
23. <http://rucont.ru/efd/246490> Протасов Ю.М. Математический анализ. – М.: НАУКА. – 166 с.
24. <http://rucont.ru/efd/193090> Основы математического анализа (модуль "Функции нескольких переменных"). - ГОУ ОГУ. – 111 с.
25. <http://www.rucont.ru/efd/237396> Климов В.С. Многомерный математический анализ. Ч. I. – ЯрГУ. 126 с.
26. <http://www.rucont.ru/efd/237397> Климов В.С. Многомерный математический анализ. Ч. II. – ЯрГУ. 125 с.

27. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: учебное пособие для среднего профессионального образования / И. В. Садовнича, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова, В. А. Ильин; под общей редакцией В. А. Ильина. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2023. — 109 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08472-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515327>

### 9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». - Режим доступа: <http://www.window.edu.ru/>
2. Портал научной электронной библиотеки. - Режим доступа: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>
3. Интернет-Университет Информационных Технологий. - Режим доступа: <https://intuit.ru>
4. Глобальная сеть дистанционного образования. – Режим доступа: <http://www.cito.ru/gdenet>.
5. Российский портал открытого образования. – Режим доступа: <http://www.openet.ru/University.nsf/>
6. Портал бесплатного дистанционного образования. – Режим доступа: [www.anriintern.com](http://www.anriintern.com)
7. Открытый колледж. Математика - Режим доступа: <https://mathematics.ru/>.
8. Математические этюды. - Режим доступа: <http://www.etudes.ru/>.
9. Портал научной электронной библиотеки-Режим доступа: <http://elibrary.ru/defaultx.asp>.
10. Сайт МЦНМО. – Режим доступа: [MCCME: Moscow Center for Continuous Mathematical Education](http://mccme.ru/)

### 9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». - Режим доступа: <https://urait.ru>
2. Полпред (обзор СМИ). - Режим доступа: <https://polpred.com/news>

## 10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером(рами) с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, коммутатором для выхода в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами, учебно-наглядными пособиями (мультимедийные презентации).

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ, в лаборатории психолого-педагогических исследований и др.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Windows, Linux; офисные программы Microsoft office, Libreoffice, OpenOffice; Adobe Photoshop, Matlab, DrWeb antivirus и т.д.

Разработчик: Якшина А.С., кандидат физико-математических наук, доцент

**11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ**

**Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2025/2026 уч. г.**

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2025/2026 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 9 от «21» мая 2025 г.).