	МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Благовещенский государственный педагогический университет»
	ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА Рабочая программа дисциплины

УТВЕРЖДАЮ
И.о. Декана физико-математического факультета ФГБОУ ВО «БГПУ»
_________________ О.А. Днепровская
«22» мая 2019 г.

Рабочая программа дисциплины

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ШКОЛЬНОГО КУРСА МАТЕМАТИКИ

Направление подготовки
44.03.05 ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
(с двумя профилями подготовки)

Профиль
«ИНФОРМАТИКА»

Профиль
«МАТЕМАТИКА»

Уровень высшего образования
БАКАЛАВРИАТ

Принята
на заседании кафедры физического и математического образования
(протокол №_9_ от «15» мая 2019 г.)

Благовещенск 2019

СОДЕРЖАНИЕ

1ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель дисциплины: углубление и систематизация знаний в области элементарной математики и развитие умений использовать различные методы и приемы решения задач повышенной трудности углубленного курса школьной математики.

1.2 Место дисциплины в структуре ООП: Дисциплина «Нестандартные задачи школьного курса математики» относится к дисциплинам обязательной части (части, формируемой участниками образовательных отношений) блока Б1 (Б1.В.02).

Для освоения дисциплины «Нестандартные задачи школьного курса математики» студенты используют знания, умения и навыки, сформированные в процессе изучения элементарной математики, дисциплин высшей математики бакалавриата. Формируемые в процессе изучения дисциплины знания и умения будут использоваться для изучения других дисциплин ООП по направлению 44.03.05 - «Педагогическое образование», а также в профессиональной деятельности и в исследовательской деятельности.

1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций: УК-1, ПК-2:

- **УК-1.** Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач, **индикаторами** достижения которой является:

- УК-1.2Находит и критически анализирует информацию, необходимую для решения поставленной задачи.

- **ПК-2.**Способен осуществлять педагогическую деятельность по профильным предметам (дисциплинам, модулям) в рамках программ основного общего и среднего общего образования индикаторами достижения которой является:

- ПК-2.2 Владеет основными положениями классических разделов математической науки, системой основных математических структур и методов.

1.4 Перечень планируемых результатов обучения. В результате изучения дисциплины студент должен

- знать:

основные понятия и строгие доказательства теоретических фактов основных тем дисциплины;

- уметь:

применять теоретические знания к решению нестандартных задач элементарной математики и углублённого курса школьной математики;

- владеть:

- различными приемами и методами решения нестандартных задач (задач с параметрами, комбинированных неравенств)элементарной математики и углублённого курса школьной математики;
- техникой применения частных математических методов к решению задач элементарной математики и углублённого курса школьной математики;
- теорией и практикой геометрии треугольника и других плоских фигур;
- различными приемами и методами измерения и вычисления площадей плоских фигур и применением метода площадей к вычислению элементов плоских геометрических фигур.

1.5 Общая трудоемкость дисциплины «Нестандартные задачи школьного курса математики» составляет 2зачетных единицы (далее – ЗЕ)(72 часа):

1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности

Объем дисциплины и виды учебной деятельности (очная форма обучения)

Вид учебной работы	Всего часов	Семестр 9
Общая трудоемкость	72	72
Аудиторные занятия	36	36
Лекции	14	14
Практические занятия	22	22
Самостоятельная работа	36	36
Вид итогового контроля	-	зачёт

2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

2.1 Очная форма обучения

Учебно-тематический план

№	Наименование тем (разделов)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	Практические занятия	
1.	Задачи с параметрами	18	3	6	9
2.	Комбинированные неравенства.	18	5	4	9
3.	Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.	18	3	6	9
4.	Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	18	3	6	9
	Зачёт				
ИТОГО		**72**	**14**	**22**	**36**

Интерактивное обучение по дисциплине

№	Наименование тем(разделов)	Вид занятия	Форма интерактивного занятия	Кол-во часов
1.	Задачи с параметрами	л	Работа в малых группах: обсуждение методов решения.	2
2.	Комбинированные неравенства.	п	Работа в парах: поиск рациональных способов решения неравенств.	2
3.	Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.	п	Работа в малых группах: исследование всевозможных геометрических ситуаций по	2

			условию задачи.	
4.	Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	п	1) Работа в малых группах: исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи. 2) Работа в парах: решение демонстрационного варианта контрольной работы. Обсуждение способов решения задач.	1 1
ИТОГО				**8**

3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

Тема 1. Задачи с параметрами

Параметр. Двойственная природа параметра. Параметр и поиск решений. Параметр и количество решений. Параметр и свойства решений. Аналитическ4ие способы решения задач с параметрами. Свойства функций в задачах с параметрами. Графические приёмы решения задач с параметрами: пересечение линий, параллельный перенос, поворот, система координат (a,x).

Тема 2. Комбинированные неравенства

Рациональные неравенства, метод интервалов. Примеры решений. Модуль математического выражения. Виды неравенств с модулем, методы их решения. Метод замены множителя. Примеры решений неравенств с модулем. Иррациональные неравенства, их основные виды, алгоритмы решения иррациональных неравенств. Метод замены множителя. Примеры решения иррациональных неравенств. Показательные неравенства, методы их решения. Метод замены множителя. Логарифмические неравенства, методы их решения. Метод замены множителя. Примеры решений показательных и логарифмических неравенств. Тригонометрические неравенства, простейшие тригонометрические неравенства, алгоритмы их решения. Методы решения тригонометрических неравенств. Примеры решений. Трансцендентное неравенство, комбинированное неравенство. Методы решения комбинированных неравенств. Метод рационализации, метод постановки. Применение свойств функций при решении комбинированных неравенств. Системы трансцендентных и комбинированных неравенств. Примеры решений неравенств и их систем.

Тема 3. Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи

Определение, виды треугольников. Соотношение между сторонами и углами треугольника: теорема косинусов, теорема синусов. Медианы, биссектрисы, высоты треугольника, точки их пересечения. Свойства замечательных линий и точек треугольника. Средняя линия треугольника, ее свойства. Вписанные и описанные треугольники. Прямоугольный треугольник, соотношение между сторонами и углами, свойства медианы и высоты прямоугольного треугольника, проведенных к гипотенузе. Равные и подобные треугольники, их признаки. Формулы для вычисления площади треугольника. Площадь подобных треугольников.

Параллелограмм: определение, свойства, признаки. Метрическое свойство диагоналей параллелограмма. Прямоугольник: определение, свойства, признаки. Ромб: определение, свойства, признаки. Квадрат. Трапеция. Равнобокая трапеция, ее свойства. Средняя линия трапеции. Пропорциональные отрезки в трапеции. Вписанные и описанные четырехугольники, их признаки. Формулы для вычисления площадей четырехугольников.

Тема 4. Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур

Определение окружности, длина окружности, длина дуги окружности. Определение круга, площадь круга, площадь сектора. Касательная к окружности, свойства касательных, свойства касательной и секущей, свойства хорд. Центральный угол, вписанный угол, их свойства; угол между хордой и касательной. Метод вспомогательной окружности.

Касающиеся окружности: внутреннее и внешнее касание. Свойства общей касательной. Пересекающиеся окружности. Окружность, вписанная в треугольник; окружность, описанная около треугольника; их центры, формулы для вычисления радиусов. Окружность, вписанная в четырехугольник; окружность, описанная около четырехугольника; положение их центра. Правильные многоугольники, их вписанные и описанные окружности, вычисление радиусов этих окружностей. Вневписанные окружности.

4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Рабочая программа призвана помочь студентам физико-математического факультета в организации самостоятельной работы по освоению дисциплины «Нестандартные задачи школьного курса математики». Ее преподавание имеет целью углубление и систематизация знаний в области элементарной математики и развитие умений использовать различные методы и приемы решения задач повышенной трудности углубленного курса школьной математики.

Теоретический материал курса представлен планом лекционных занятий с указанием вопросов, рассматриваемых на каждой лекции.

Рабочая программа содержит планы проведения практических занятий с указанием последовательности рассматриваемых вопросов, примеры типовых задач, примерные варианты контрольных работ, проводимых на занятиях.

В программе представлены примеры вариантов индивидуальных заданий, которые позволят проверить уровень усвоения изученного материала и сформированности профессиональных и специальных компетенций. При выполнении индивидуальных заданий студент может воспользоваться списком полезных фактов, приведенных в литературе.

Рабочая программа содержит демонстрационный вариант итоговой контрольной работы, который позволит наиболее эффективно организовать подготовку к письменному экзамену.

При подготовке к занятиям, экзамену студенты могут использовать литературу, приведенную в программе.

Подготовку к экзамену наиболее рационально осуществлять путем повторения и систематизации дисциплины с помощью кратких конспектов. При работе с теоретическим материалом студент должен уяснить наиболее важные идеи каждой темы, уметь пользоваться основными понятиями и утверждениями (знать их формулировки, демонстрировать их использование на примерах, понимать условия применения и т.д.).

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответствии с учебно-тематическим планом
1.	Задачи с параметрами	ДЗ: решение задач Выполнение ИЗ	9
2.	Комбинированные неравенства.	ДЗ: решение задач Выполнение ИЗ	9
3.	Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.	Конспект «Теорема Чевы, Теорема Менелая» ДЗ: решение задач Выполнение ИЗ	9
4.	Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.	ДЗ: решение задач Выполнение ИЗ Подготовка к итоговой контрольной работе	9
	ИТОГО		**36**

5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Тема 1. Задачи с параметрами

Практическое занятие 1. Задачи с параметрами. Аналитические способы решения

План

1. Параметр и поиск решений.
2. Параметр и количество решений.
3. Параметр и свойства решений.
4. Свойства функций в задачах с параметрами.

Задачи, предлагаемые для решения

1) Решите уравнение при всех значениях параметра a:
   a. $(a-5)x^2+3ax-(a-5)=0$,
   b. $(4-a)x^2-6ax+3=0$
2) При каких значениях aуравнение $ax^2+(1-a^2)x-a=0$ имеет хотя бы одно решение?
3) Найдите все значения a, при которых неравенство не имеет решений.
   a. $x^2+(2a+4)x+8a+1\le 0$,
   b. $ax^2-3x+a\le 0$
4) Найдите все значения m, при которых решением неравенства является любое действительное число?
   a. $x^2-mx+(3-m)>0$,
   b. $ax^2-2ax+1>0$
5) Найдите все значения a, при каждом их которых из неравенства $0\le x\le 1$ следует неравенство $(a^2+a-2)x^2-(a+5)x-2\le 0$.
6) Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-4)\ge(a+2)(|x-2|-2)$ включает все члены некоторой арифметической

прогрессии, содержащей как отрицательные, так и положительные члены, а разность этой прогрессии равна 0,5.

7) Найдите все значения а, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 4x + 3|$ больше 1.
8) Найдите все значения а, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$ больше 1.
9) Найдите наибольшее значение а, при котором уравнение $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен -2.

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи (9): II.70 – II.90, II.120 – II.123, II.141 – II.145, II.168 – II. 172.

Рекомендуемая литература: (1), (6), (9), (17), (29).

Практическое занятие 2; 3. Задачи с параметрами. Графические приемы решения

План

1. Пересечение линий.
2. Параллельный перенос.
3. Поворот.
4. Система координат (a,x).

Задачи, предлагаемые для решения

1) Найдите все значения а, при каждом из которых система $\begin{cases} a(x^4+1) = y + 2 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$ имеет единственное решение.
2) Найдите все а, при которых система $\begin{cases} x^2 + (8a+4)x + 7a^2 + 4a < 0, \\ x^2 + a^2 = 16. \end{cases}$ имеет решения.
3) При каких значениях а система имеет единственное решение $\begin{cases} \log_2(a+x) \le 1, \\ |a - x| \le 1. \end{cases}$
4) Найдите все значения параметра *b*, при которых корни уравнения существуют и принадлежат отрезку [2;17]: $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = b$.
5) Найдите все значения p, при которых уравнение $8\sin^3 x = p + 9\cos 2x$ не имеет корней.
6) При каких значениях а число корней уравнения $|x^2 - 8|x| + 7| = a$ равно a.
7) Найдите все значения *a*, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$ пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.
8) Найдите все значения *a*, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$ пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.
9) Найдите все значения *a*, при каждом из которых решения неравенства $|2x - a| + 1 \le |x + 3|$ образует отрезок длиной 1.
10) Найдите все значения *a*, при каждом из которых решения неравенства $|3x - a| + 2 \le |x - 4|$ образует отрезок длиной 1.
11) Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $2|2|x| - a^2| = x - a$ имеет три различных решения.
12) При каких значениях параметра *a*уравнение $(a + 1 - |x - 1|)(a + x^2 - 2x) = 0$ имеет ровно три корня.
13) При каких значениях параметра *a*уравнение $(x^2 - a)^2 - 6x^2 + 4x + 2a = 0$ имеет ровно три корня?

14) Найдите все значения a, при которых система $\begin{cases} x^2+2x+a\le 0, \\ x^2-4x-6a\le 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

15) Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3)\ge 0, \\ ax\ge 4 \end{cases}$ не имеет решений.

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи (9): II.211 – II.221, II.249 – II.260, II.324 – II.340.

Рекомендуемая литература: (1), (6), (9), (17), (29).

Тема 2. Комбинированные неравенства.

Практическое занятие 4. Комбинированные неравенства (показательные, логарифмические и тригонометрические неравенства)

План

1. Способы решения показательных неравенств. Метод замены множителя.
2. Степенно-показательные неравенства.
3. Способы решения логарифмических неравенств. Метод замены множителя.
4. Решение логарифмических неравенств с неизвестной в основании.
5. Решение систем показательных и логарифмических неравенств.
6. Способы решения тригонометрических неравенств.

Задачи, предлагаемые для решения

(4), стр. 18 № 17-32; стр. 25 № 17-31, стр. 43 № 1-39.

Задания для самостоятельной работы

Чётные номера из предложенных выше решить самостоятельно, а также (4), стр. 47 № 13-25.

Рекомендуемая литература: (1), (2), (4), (15), (18).

Практическое занятие 5. Комбинированные неравенства

Проводится в интерактивной форме (работа в парах: поиск рациональных способов решения неравенств).

Задание для самостоятельной работы в парах

1. Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{7}{(x-2)(x-3)}+\frac{9}{x-3}+1<0.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{4^x+2x-4}{x-1}\le 2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x}\ge 1.$$

5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\ge\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

6. Решите неравенство

$$\frac{3}{|x+3|-1} \geq |x+2|.$$

7. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2+2x-x^2}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2} \leq 0.$$

Тема 3. Геометрия треугольника. Четырехугольники. Исследовательские задачи.

Практическое занятие 6. Геометрия треугольника. Замечательные линии и точки треугольника

План

1. Медиана треугольника, свойства точки пересечения. Медиана прямоугольного треугольника.
2. Биссектриса треугольника, её свойства.
3. Свойства высот треугольника и точки их пересечения.
4. Решение исследовательских задач (выделенных *курсивом*).

Задачи, предлагаемые для решения

1. *Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами тип. Найдите стороны треугольника.*
2. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведены высота CD и медиана CE. Площади треугольников ABC и CDE равны соответственно 10 и 3. Найдите AB.
3. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AB и AC равны 4 и 3 соответственно. Точка D делит гипотенузу BC пополам. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ADC и ABD.
4. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.
5. В четырёхугольнике ABCD диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P. Отрезок, соединяющий вершину Cс серединой M отрезка AD, равен$\frac{5}{4}$, AP = 1. Расстояние от точки P до отрезка BC равно $\frac{1}{2}$. Найдите AD, если известно, что вокруг четырёхугольника ABCD можно описать окружность. Указание. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из точки P на сторону BC. Тогда точки M, P и H лежат на одной прямой, а треугольник PHC подобен треугольнику APD.
6. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите площадь трапеции. Указание. Если сумма углов при основании трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.
7. *Средняя линия трапеции равна 4, углы при одном из оснований равны 40° и 50°. Найдите основания трапеции, если отрезок, соединяющий середины оснований, равен 1.*
8. Диагонали трапеции перпендикулярны. Одна из них равна 6. Отрезок, соединяющий середины оснований, равен 4,5. Найдите площадь трапеции.
9. *Гипотенуза KM прямоугольного треугольника KMP является хордой окружности радиуса $\sqrt{7}$. Вершина P находится на диаметре, который параллелен гипотенузе. Расстояние от центра окружности до гипотенузы равно $\sqrt{3}$. Найдите острые углы треугольника KMP.*

10. В треугольнике ABC известно, что AB = c, AC = b (b>c), AD — биссектриса. Через точку D проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая AC в точке E. Найдите AE. Указание. Соедините точку D с серединой отрезка AE.
11. *Точка E лежит на стороне AC равностороннего треугольника ABC; точка K — середина отрезка AE. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно прямой AB, и прямая, проходящая через точку C перпендикулярно прямой BC, пересекаются в точке D. Найдите углы треугольника BKD. Указание. Точки B, C, D, K и точка пересечения прямых AB и DE лежат на окружности с диаметром BD.*
12. В трапеции ABCD точка K — середина основания AB, M — середина основания CD. Найдите площадь трапеции, если известно, что DK — биссектриса угла D, BM — биссектриса угла B, наибольший из углов при основании AB равен 60°, а периметр равен 30.
13. *Найдите высоты треугольника, если его площадь равна S, а углы равны α, $в$ и γ.*
14. В остроугольном треугольнике ABC с углом C, равным 30°, высоты пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMB, если расстояние от центра окружности, описанной около треугольника ABC, до сторон BC и AC соответственно равны $\sqrt{2}$и$\frac{\sqrt{3}}{3}$.
15. *В треугольнике ABC проведены высоты BM и CN, O — центр вписанной окружности. Известно, что BC = 24, MN = 12. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BOC.*
16. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника. Найдите угол ACB.*
17. *Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что CH = AB. Найдите угол ACB.*
18. В треугольнике ABC известно, что AB = 2, AC = 5, BC = 6. Найдите расстояние от вершины B до точки пересечения высот.
19. *На стороне AB треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AC и BC в точках D и E соответственно. Прямая DE делит площадь треугольника пополам и образует с прямой AB угол 15°. Найдите углы треугольника ABC.*
20. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CM и AN. Известно, что AC = 2, а площадь круга, описанного около треугольника MBN, равна$\frac{\pi}{3}$. Найдите угол между высотой CM и стороной BC.

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи №: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

Рекомендуемая литература: (1), (2), (3), (4), (7).

Практическое занятие 7. Геометрия треугольника. Отношение отрезков и площадей

План

1. Подобные треугольники, вспомогательные подобные треугольники.
2. Отношение отрезков.
3. Отношение площадей.
4. Решение исследовательских задач (выделенных *курсивом*).

Задачи, предлагаемые для решения

1. В угол вписаны касающиеся внешним образом окружности радиусов r и R (r< R). Первая из них касается сторон угла в точках A и B. Найдите AB.

2. *Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, разбивает трапецию на две трапеции, площади которых относятся как 2:3. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри трапеции.*
3. Около окружности описана равнобедренная трапеция. Боковая сторона трапеции равна 4, отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен 1. Найдите диаметр окружности.
4. *В некоторый угол вписана окружность радиуса 5. Хорда, соединяющая точки касания, равна 8. К окружности проведены две касательные, параллельные хорде. Найдите стороны полученной трапеции.*
5. Расстояние от центра O окружности, описанной около треугольника ABC, до стороны BC равно 1. Найдите расстояние от точки пересечения высот до вершины A.
6. Боковая сторона AB трапеции ABCD перпендикулярна основаниям AD и BC. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD — в точке N. Известно также, что MC = a, BN = b, а расстояние от точки D до прямой MC равно c. Найдите расстояние от точки A до прямой BN. Указание. Пусть AK и DL — высоты треугольников ABN и DCM. С помощью метода вспомогательной окружности докажите подобие этих треугольников.
7. *В треугольник ABC со сторонами AB = 6, BC = 5, AC = 7 вписан квадрат, две вершины которого лежат на стороне AC, одна на стороне AB и одна на стороне BC. Через середину D стороны AC и центр квадрата проведена прямая, которая пересекается с высотой BH треугольника ABC в точке M. Найдите площадь треугольника DMC. Указание. Точка M — середина высоты BH.*
8. *Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Хорда BC в большей окружности касается меньшей в точке D. Прямая AD вторично пересекает большую окружность в точке M. Найдите MB, если MA = a, MD = b. Указание. AM — биссектриса угла BAC, треугольники ABM и BDM подобны.*
9. *Пятиугольник ABCDE вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC, DC и DE равны соответственно a, b и c. Найдите расстояние от вершины A до прямой BE. Указание. Пусть точки K, L, M и N — основания перпендикуляров, опущенных из вершины A на прямые BC, DC, DE и BE соответственно. Треугольники AKL и ANM подобны.*
10. В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении AK:BK = 2:3, а на стороне AC взята точка L, делящая AC в отношении AL: LC = 5:3. Точка Q пересечения прямых CK и BL отстоит от прямой AB на расстоянии 1,5. Найдите сторону AB.
11. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что AP < AQ. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что PQ = 3. Найдите AC.
12. Дан треугольник ABC. Известно, что AB = 4, AC = 2 и BC = 3. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке K. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC, пересекает продолжение биссектрисы AK в точке M. Найдите KM.
13. Около окружности описана равнобедренная трапеция ABCD. Боковые стороны AB и CD касаются окружности в точках M и N, K — середина AD. В каком отношении прямая BK делит отрезок MN?
14. Около окружности описана равнобедренная трапеция ABCD. Боковая сторона AB касается окружности в точке M, а основание AD — в точке N. Отрезки MN и AC пересекаются в точке P, причём NP: PM = 2. Найдите отношение AD : BC.
15. Во вписанном четырёхугольнике ABCD известны отношения AB:DC = 1:2 и BD: AC = 2:3. Найдите DA:BC.

16. В треугольнике ABC проведена высота AD. Прямые, одна из которых содержит медиану BK, а вторая — биссектрису BE, делят эту высоту на три равных отрезка. Известно, что AB = 4. Найдите сторону AC.
17. *При каком отношении оснований трапеции существует прямая, на которой шесть точек пересечения с диагоналями, боковыми сторонами и продолжениями оснований трапеции высекают пять равных отрезков?*
18. *В трапеции ABCD с боковыми сторонами AB = 9 и CD = 5 биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках Mи N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причём точка K лежит на основании AD. а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK — сторону BC? б) Найдите отношение MN: KL, если LM: KN = 3:7.*
19. *Из точки A проведены две касательные (M и N — точки касания, O — центр окружности) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN — в точке P. Известно, что AB: BC = = 2:3. Найдите AP:PC. Указание. Пусть D и E — середины хорд MN и BC соответственно. Тогда AP • AE = AD • AO =* AM^2 *= AB • AC.*
20. На сторонах AB и AD параллелограмма ABCD взяты точки M и N. При этом прямые MC и NC разбивают параллелограмм на три равновеликие части. Найдите MN, если BD = d.
21. В треугольнике ABC угол A равен 45°, а угол C острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся как 1:8. Найдите углы треугольника ABC.
22. В треугольнике ABC из точки E стороны BC проведена прямая, параллельная высоте BD и пересекающая сторону AC в точке F. Отрезок EF делит треугольник ABC на две равновеликие фигуры. Найдите EF, если BD = 6, $\frac{AD}{DC} = \frac{2}{7}$.
23. *Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам. Эти прямые разбивают треугольник на шесть частей, три из которых—треугольники с площадями* S_1, S_2, S_3. *Найдите площадь данного треугольника.*
24. *В равнобедренном треугольнике ABC (AB = BC) проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны соответственно* S_1 *и* S_2. *Найдите AC.*
25. *На сторонах AB, AC и BC правильного треугольника ABC расположены соответственноточки* C_1, B_1 *и* A_1 *причём треугольник* $A_1B_1C_1$ *равносторонний. Отрезок* BB_1 *пересекает сторону* C_1A_1 *в точке O, причём* $\frac{BO}{OB_1} = k$. *Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника* $A_1B_1C_1$.

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи №: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

Рекомендуемая литература: (1), (2), (3), (4), (7).

Практическое занятие 8. Четырехугольники. Исследовательские задачи

Занятие проводится в интерактивной форме. Работа в малых группах. Исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи. Поиск рациональных способов решения исследовательских задач. Презентация наиболее интересных способов решения.

Примерный список задач, предлагаемых для решения в малой группе:

1. В треугольник, две из трёх сторон которого равны 9 и 15, вписан параллелограмм так, что одна из его сторон, равная 6, лежит на третьей стороне треугольника, а диагонали параллелограмма параллельны двум данным сторонам треугольника. Найдите другую сторону параллелограмма и третью сторону треугольника.
2. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма ABCD как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC. Найдите углы параллелограмма.
3. Дан параллелограмм со сторонами 1 и 2 и острым углом 60°. На двух его противоположных сторонах как на основаниях построены вне параллелограмма равнобедренные треугольники с углами 120° при вершинах. Найдите расстояние между этими вершинами. Указание. Отрезок, соединяющий вершины данных равнобедренных треугольников, проходит через центр параллелограмма.
4. Точки M, K, N и L — середины сторон соответственно AB, BC, CD и DE пятиугольника ABCDE, P и Q — середины отрезков MN и KL соответственно. Известно, что PQ = 1. Найдите сторону AE. Указание. Пусть F — середина AD. Тогда MKNF — параллелограмм, PQ — средняя линия треугольника KFL, а FL — средняя линия треугольника ADE.
5. В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса R. 4 Найдите стороны трапеции, если её меньшее основание равно $\frac{4}{3}$R.
6. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около неё, если известно, что эти окружности существуют.
7. Известно, что высота трапеции равна 15, а диагонали трапеции равны 17 и 113. Чему равна её площадь?
8. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр её описанной окружности лежит на большем основании.
9. Площадь равнобедренной трапеции равна $\sqrt{3}$. Угол между диагональю и основанием на 20° больше угла между диагональю и боковой стороной. Найдите острый угол трапеции, если её диагональ равна 2.
10. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найдите стороны трапеции, если её высота равна 12, а длины биссектрис равны 15 и 13.
11. Дана трапеция ABCD с боковыми сторонами AB = 27, CD = 28 2 и основанием BC = 5. Известно, что cos∠BCD = $-\frac{2}{7}$. Найдите диагональ AC.
12. Дана трапеция ABCD, диагонали AC и BD которой пересекаются под прямым углом, а продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K под углом 30°. Известно, что ∠BAC = ∠CDB, а площадь трапеции равна S. Найдите площадь треугольника AKD.

Тема 4. Окружность, круг. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и других плоских фигур.

Практическое занятие 9. Окружность. Круг. Отрезки и углы, связанные с окружностью

План

1. Касательная к окружности.
2. Пропорциональные отрезки в окружности.
3. Углы, связанные с окружностью. Метод вспомогательной окружности.
4. Решение исследовательских задач (выделенных *курсивом*).

Задачи, предлагаемые для решения

1. Из точки M, лежащей вне окружности радиуса 1, проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные MA и MB. Между точками касания A и B на меньшей дуге AB взята произвольная точка C и через неё проведена третья касательная KL, образующая с касательными MA и MB треугольник KLM. Найдите периметр этого треугольника.
2. На основании равнобедренного треугольника, равном 8, как на хорде построена окружность, касающаяся боковых сторон треугольника. Найдите радиус окружности, если высота, опущенная на основание треугольника, равна 3.
3. *Радиусы двух окружностей равны 27 и 13, а расстояние между центрами равно 50. Найдите длины общих касательных к этим окружностям.*
4. Две окружности радиусов 4 и 3 с центрами в точках O_1 и O_2 касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2 соответственно и лежат по разные стороны от этой прямой. Отношение отрезков O_1O_2 и M_1M_2равно $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Найдите O_1O_2.
5. Две окружности радиусов 12 и 7 с центрами в точках O_1 и O_2касаются некоторой прямой в точках M_1 и M_2соответственно и лежат по одну сторону от этой прямой. Отношение отрезков M_1M_2 и O_1O_2равно$\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Найдите M_1M_2.
6. *В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 16 и катет BC равен 12. Из центра B радиусом BC описана окружность и к ней проведена касательная, параллельная гипотенузе. Катет BC продолжен до пересечения с проведённой касательной. Определите, на какое расстояние продолжен катет.*
7. Дан треугольник со сторонами 10, 24 и 26. Две меньшие стороны являются касательными к окружности, центр которой лежит на большей стороне. Найдите радиус окружности.
8. Найдите длину хорды, если дан радиус r окружности и расстояние a от одного конца хорды до касательной, проведённой через другой её конец.
9. *Один из смежных углов с вершиной A вдвое больше другого. В эти углы вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Найдите углы треугольника O_1AO_2, если отношение радиусов окружностей равно$\sqrt{3}$.*
10. Через вершины B и C треугольника ABC проведена окружность, которая пересекает сторону AB в точке K, а сторону AC — в точке E. Найдите AE, зная, что AK = KB = a, $\angle BCK = \alpha$, $\angle CBE = \beta$.
11. Окружность, построенная на стороне AC треугольника ABC как на диаметре, проходит через середину стороны BC и пересекает в точке D продолжение стороны AB за точку A, причём AD = $\frac{2}{3}$AB. Найдите площадь треугольника ABC, если AC = 1.
12. Каждая из боковых сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC разделена на три равные части, и через четыре точки деления на этих сторонах проведена окружность, высекающая на основании AC хорду DE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE, если AB = BC = 3 и AC = 4.
13. *Окружность, диаметр которой равен$\sqrt{10}$, проходит через соседние вершины Aи B прямоугольника ABCD. Длина касательной, проведённой из точки C к окружности, равна 3, AB = 1. Найдите сторону BC.*
14. Окружность проходит через соседние вершины M и N прямоугольника MNPQ. Длина касательной, проведённой из точки Q к окружности, равна 1, PQ = 2. Найдите площадь прямоугольника MNPQ, если диаметр окружности равен $\sqrt{5}$.
15. Окружность, проходящая через вершины B, C и D параллелограмма ABCD, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. Найдите AE, если AD = 4 и CE = 5.
16. Из точки A, находящейся на расстоянии 5 от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие AKC и ALB, угол между которыми равен 30° (K, C, L, B — точки

пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна 10.

17. На прямой расположены точки A, B, C и D, следующие друг за другом в указанном порядке. Известно, что BC = 3, AB = 2CD. Через точки Aи C проведена некоторая окружность, а через точки B и D — другая. Их общая хорда пересекает отрезок BC в точке K. Найдите BK.
18. В равнобедренном треугольнике ABC (AB = AC) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найдите BC, если известно, что AC = 1, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E и F.
19. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника ABCD и проходит через вершину C. Сторону DC она пересекает в точке N. Найдите площадь трапеции ABND, если AB = 9 и AD = 8.
20. На одной из сторон угла, равного α (α< 90°), с вершиной в точке O взяты точки A и B, причём OA = a, OB = b. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны угла.
21. На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность. Она пересекает гипотенузу AB в точке E. На стороне BC взята точка G так, что отрезок AG пересекает окружность в точке F, причём отрезки EF и AC параллельны, BG = 2CG и AC =$2\sqrt{3}$. Найдите GF.
22. В параллелограмме ABCD угол BCD равен 150°, а сторона AD равна 8. Найдите радиус окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей сторону AD на расстоянии 2 от точки D.
23. Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.
24. *Равнобедренная трапеция с основаниями AD и BC (AD >BC) описана около окружности, которая касается стороны CD в точке M. Отрезок AM пересекает окружность в точке N. Найдите отношение AD к BC, если AN: NM = к.*
25. *В трапеции ABCD с основаниями AD и BC угол A равен 45°, угол D равен 60°. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание AD в точке E. Найдите отношение AE :ED.*
26. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и BE, пересекающиеся в точке O. Известно, что OE = 1, а вершина Cлежит на окружности, проходящей через точки E, D и O. Найдите стороны и углы треугольника EDO.
27. *В треугольнике ABC угол B прямой, величина угла A равнаα, точка D — середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол AC_1B.*
28. В выпуклом четырёхугольнике ABCD проведены диагонали AC и BD. Известно, что AD = 2, ∠ABD = ∠ACD = 90°, а расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, равно $\sqrt{2}$. Найдите BC. Указание. Из центров O_1 и O_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, отрезок AD виден под одним и тем же углом. Центр окружности, проходящей через точки O_1,O_2, A и D, лежит на описанной окружности четырёхугольника ABCD.
29. *В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает прямую AC в точке M, а перпендикуляр, проходящий через середину стороны AC, пересекает прямую AB в точке N. Известно, что MN = BC и прямая MN перпендикулярна прямой BC. Найдите углы треугольника ABC. Указание. Рассмотрите два случая: угол B тупой или острый. Точки M, N и середины сторон AB и AC лежат на одной окружности.*
30. *В равносторонний треугольник ABC вписана полуокружность с центром O на стороне AB. Некоторая касательная к полуокружности пересекает стороны BC и AC в*

точках M и N соответственно, а прямая, проходящая через точки касания сторон BC и AC с полуокружностью, пересекает отрезки OM и ON соответственно в точках P и Q. Найдите PQ, если MN = 2.

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи №: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26.

Рекомендуемая литература: (1), (2), (3), (4), (7).

Практическое занятие 10. Комбинации окружностей, окружностей и плоских фигур

План

1. Касающиеся окружности.
2. Пересекающиеся окружности.
3. Комбинации окружностей и треугольников.
4. Комбинации окружностей и четырехугольников.
5. Решение исследовательских задач (выделенных *курсивом*).

Задачи, предлагаемые для решения

1. *Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найдите радиус второй окружности, если AB = 4.*
2. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке C. Радиусы окружностей равны 2 и 7. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку C, пересекается с другой их общей касательной в точке D. Найдите расстояние от центра меньшей окружности до точки D.
3. Окружность радиуса rкасается некоторой прямой в точке M. На этой прямой по разные стороны от M взяты точки A и B, причём MA = MB = a. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся данной окружности.
4. *Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.*
5. В треугольнике ABC сторона BC равна a, радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиусы двух равных окружностей, касающихся друг друга, если одна из них касается сторон BC и BA, а другая — сторон BC и CA.
6. Две окружности радиусов 5 и 3 касаются внутренним образом. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении 3:1. Найдите длину этой хорды.
7. Две окружности, радиусы которых относятся как $9-4\sqrt{3}$к 1, касаются друг друга внутренним образом. В большей окружности проведены две равные хорды, касающиеся меньшей окружности. Одна из этих хорд перпендикулярна отрезку, соединяющему центры окружностей, а другая нет. Найдите угол между этими хордами.
8. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр большей окружности, пересекает её в точках A и D, а меньшую окружность — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если AB: BC: CD = 3:7:2.
9. Две окружности касаются внутренним образом. Прямая, проходящая через центр меньшей окружности, пересекает большую окружность в точках A и D, а меньшую — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если AB: BC: CD = 2:4:3.
10. *Две окружности радиусов R и r (R>r) касаются внешне в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где Aи B — точки касания. Найдите стороны треугольника ABC.*

11. *Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Найдите радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания с одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.*
12. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.
13. Две окружности радиусов 5 и 4 касаются внешним образом. Прямая, касающаяся меньшей окружности в точке A, пересекает большую в точках B и C, причём AB = BC. Найдите AC.
14. *Точка B — середина отрезка AC, причём AC = 6. Проведены три окружности радиуса 1 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.*
15. *Точка B — середина отрезка AC, причём AC = 6. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.*
16. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности, $\angle OAK = 60°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол OAK и касающейся данной окружности внешним образом.
17. *В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём $\angle CDA = 120°$. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если $OC = 2, OD = \sqrt{3}$.*
18. Окружности радиусов r и R касаются друг друга внутренним образом. Найдите сторону равностороннего треугольника, у которого одна вершина находится в точке касания данных окружностей, а две другие лежат на разных данных окружностях.
19. Радиусы окружностей S_1 и S_2, касающихся в точке A, равны R и r соответственно (R>r). Прямая, проходящая через точку B, лежащую на окружности S_1 касается окружности S_2 в точке C. Найдите BC, если AB = a.
20. В прямоугольном треугольнике отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно $\frac{2}{5}$. Найдите острые углы треугольника.
21. В прямоугольный треугольник ABC с углом A, равным 30°, вписана окружность радиуса R. Вторая окружность, лежащая вне треугольника, касается стороны BC и продолжений двух других сторон. Найдите расстояние между центрами окружностей.
22. В треугольнике PQR угол QRP равен 60°. Найдите расстояние между точками касания со стороной QR окружности радиуса 2, вписанной в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся продолжений сторон PQ и PR.
23. *Равносторонний треугольник ABC со стороной 3 вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причём хорда AD равна $\sqrt{3}$. Найдите хорды BD и CD.*
24. *Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, $\angle AOC = 60°$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.*
25. В треугольнике ABC известно, что AC = b, $\angle ABC = \alpha$. Найдите радиус окружности, проходящей через центр вписанного в треугольник ABC круга и вершины A и C.
26. В окружности проведены две хорды AB = a и AC = b. Длина дуги AC вдвое больше длины дуги AB. Найдите радиус окружности.
27. Из точки M на окружности проведены три хорды: MN = 1, MP = 6, MQ = 2. При этом углы NMP и PMQ равны. Найдите радиус окружности.
28. В треугольнике ABC с периметром 2p острый угол BAC равен a. Окружность с центром в точке O касается стороны BC и продолжения сторон AB и AC в точках

К и L соответственно. Точка D лежит внутри отрезка ЛК, AD = a. Найдите площадь треугольника DOK.

29. *В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.*
30. Прямоугольный треугольник ABC разделён высотой CD, проведённой к гипотенузе, на два треугольника: BCD и ACD. Радиусы окружностей, вписанных в эти треугольники, равны 4 и 3 соответственно. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.
31. К окружности, вписанной в треугольник со сторонами 6,10 и 12, проведена касательная, пересекающая две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.
32. Окружность, вписанная в треугольник, точкой касания делит одну из сторон на отрезки, равные 3 и 4, а противолежащий этой стороне угол равен 120°. Найдите площадь треугольника.
33. Пусть CD — медиана треугольника ABC. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если AC-BC = 2.

Задание для самостоятельной работы

Решите задачи №: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26.

Рекомендуемая литература: (1), (2), (3), (4), (7).

Практическое занятие 11. Исследовательские задачи на комбинации окружностей, окружностей и плоских фигур

Занятие проводится в интерактивной форме. Работа в малых группах. Исследование всевозможных геометрических ситуаций по условию задачи. Презентация наиболее интересных случаев.

Примерный список задач, предлагаемых для решения:

1. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведённая через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найдите радиус второй окружности, если AB = 4.
2. Одна окружность описана около равностороннего треугольника ABC, а вторая вписана в угол A и касается первой окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.
3. Две окружности радиусов R и r (R>r) касаются внешне в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где Aи B — точки касания. Найдите стороны треугольника ABC.
4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Найдите радиусы окружностей, если хорды, соединяющие точку A с точками касания с одной из общих внешних касательных, равны 6 и 8.
5. Точка B — середина отрезка AC, причём AC = 6. Проведены три окружности радиуса 1 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.
6. Точка B — середина отрезка AC, причём AC = 6. Проведены три окружности радиуса 5 с центрами A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных.
7. В круге с центром O хорда AB пересекает радиус OC в точке D, причём $\angle CDA$ = 120°. Найдите радиус окружности, вписанной в угол ADC и касающейся дуги AC, если OC = 2,OD =$\sqrt{3}$.

8. Равносторонний треугольник ABC со стороной 3 вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причём хорда AD равна $\sqrt{3}$. Найдите хорды BD и CD.
9. Пусть O — центр окружности, описанной около треугольникаABC, $\angle AOC = 60°$. Найдите угол AMC, где M — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.
10. В треугольник вписана окружность радиуса 4. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на части, равные 6 и 8. Найдите две другие стороны треугольника.

6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМО-КОНТРОЛЯ)УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

6.1Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
УК-1, ПК-2	Индивидуальное задание	Низкий (неудовлетворительно)	1. допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3»; 2. или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый (удовлетворительно)	1. не более двух грубых ошибок; 2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета; 3. или не более двух-трех негрубых ошибок; 4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов; 5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
		Базовый (хорошо)	1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета; 2. или не более двух недочетов.
		Высокий (отлично)	1. выполнил работу без ошибок и недочетов; 2. допустил не более одного недочета.

6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является зачёт.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

Критерии оценивания ответа на зачете

Форма проведения зачета – итоговая контрольная работа.
Критерии оценки:

Оценка «зачтено» ставится, если выполнено 4 задания с одним недочетом или любые три задания. В противном случае ставится оценка «незачтено».

6.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

6.3.1 Индивидуальное задание (примерные варианты)

Вариант 1

1. Две стороны треугольника равны 10 и 12, а медиана, проведённая к третьей стороне, равна 5. Найдите третью сторону и площадь треугольника.
2. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом. Кроме того, обе эти окружности касаются внутренним образом окружности радиуса R с центром O. Найдите периметр треугольника OO_1O_2.
3. Точки D и E расположены на стороне AC треугольника ABC. Прямые BD и BE разбивают медиану AM треугольника ABC на три равных отрезка. Найдите площадь треугольника BDE, если площадь треугольника ABC равна 1.
4. Сторона AB правильного шестиугольника ABCDEF равна $\sqrt{3}$ и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны шестиугольника лежат вне этой окружности. Прямая, проходящая через вершину C, касается окружности в точке M. Известно, что CM = 3. Найдите диаметр окружности.
5. Центр окружности радиуса 6, касающейся сторон AB, BC и CD равнобедренной трапеции ABCD, лежит на её большем основании AD. Основание BC равно 4. Найдите расстояние между точками, в которых окружность касается боковых сторон AB и CD этой трапеции.
6. Углы при вершинах A и B треугольника ABC равны 75° и 45° соответственно, отрезки AA_1 и BB_1 — высоты треугольника. Касательная в точке C к окружности, описанной около треугольника A_1B_1C, пересекается с прямой AA_1 в точке K. Известно, что CK = a. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.
7. Решите неравенство $\frac{2x+3}{3x+2} \geq \frac{4x+1}{x+4}$.
8. Решите неравенство $\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10}{x-4} + 1 > 0$.
9. Решите неравенство $x^2 3^x - 3^{x+1} \leq 0$.
10. Решите неравенство $(x+1)\log_8(x^2+2x-2) < 0$.
11. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \leq 0$.
12. Решите неравенство $\frac{x^2-1}{|x|-1} > 0$.
13. Решите неравенство $\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(x+2)}{x}$.
14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.
15. Найдите все значения a, при которых уравнение $(\log_2(x+a) - \log_2(x-a))^2 - 3a(\log_2(x+a) - \log_2(x-a)) + 2a^2 - a - 1 = 0$

Вариант 2

1. Медиана и высота прямоугольного треугольника, проведённые из вершины прямого угла, равны 5 и 4. Найдите катеты.
2. Найдите периметр треугольника, один из углов которого равен a, а радиусы вписанной и описанной окружностей равны r и R соответственно.

3. В треугольник ABC со сторонами AB = 18 и BC = 12 вписан параллелограмм BKLM, причём точки K, L и M лежат на сторонах AB, AC и BC соответственно. Известно, что площадь параллелограмма составляет $\frac{4}{9}$ площади треугольника ABC, Найдите стороны параллелограмма.

4. Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C, равны a и b соответственно. Найдите катеты AC и BC.

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C сторона CA = 4. На катете BC взята точка D, причём CD = 1. Окружность радиуса $\frac{\sqrt{5}}{2}$ проходит через точки C и D и касается в точке C окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.

6. На сторонах прямоугольного треугольника с катетами a и b построены квадраты, лежащие вне треугольника. Найдите площадь треугольника с вершинами в центрах квадратов.

7. Решите неравенство $\frac{3x^2-2x-1}{2x^2+5x+3} < \frac{2x^2-3x+1}{3x^2+7x+4}$.

8. Решите неравенство $\frac{(x-2)(x-4)(x-7)}{(x+2)(x+4)(x+7)} > 1$.

9. Решите неравенство $\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}} \le \left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}$.

10. Решите неравенство $\log_{x^2}(x^2+x-1) < 0$.

11. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \ge 2$.

12. Решите неравенство $\frac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|} \le 0$.

13. Решите неравенство $\frac{(|2x+1|-x-2)\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+4)+1\right)}{2^{x^2}-2^{|x|}} \ge 0$.

14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{6}{x}-5\right| = ax-1$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.

15. Найдите все значения a, при которых уравнение $(ax^2-2x)^2+(a^2-a+2)(ax^2-2x)-a^2(a-2)=0$ имеет ровно два решения.

6.3.2 Итоговая (зачетная) контрольная работа

Вариант 0

1. Решите неравенство $\frac{(x+1)(x+2)}{x^2-|x|-2} \ge -3x$.

2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(5^{1+lgx}-\left(\frac{1}{2}\right)^{1+lgx}\right) \ge -1+lgx$.

3. Найдите радиус окружности, касающейся двух концентрических (имеющих один и тот же центр) окружностей радиусов 3 и 5.

4. Окружность, построенная как на диаметре на меньшей боковой стороне прямоугольной трапеции, касается большей боковой стороны, равной a. Найдите среднюю линию трапеции.

5. Точка D делит основание BC равнобедренного треугольника ABC на два отрезка, один из которых на 4 больше другого. Найдите расстояние между точками, в которых вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются отрезка AD.

6. Найдите все значения a, при которых уравнение $\left((a-1)x^2+3x\right)^2-2\left((a-1)x^2+3x\right)+1-a^2=0$ имеет ровно два решения.

7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ

Информационные технологии–обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- Официальный сайт БГПУ;
- Корпоративная сеть и корпоративная электронная почта БГПУ;
- Система электронного обучения ФГБОУ ВО «БГПУ»;
- Система «Антиплагиат.ВУЗ»;
- Электронные библиотечные системы;
- Мультимедийное сопровождение лекций и практических занятий;

8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ ИЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ

9.1 Литература

1. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1995– 348 с. (21 экз.)
2. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2007. – 239 с. (21 экз.)
3. Далингер, В. А. Математика: обратные тригонометрические функции. Решение задач : учебное пособие для среднего профессионального образования / В. А. Далингер. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Издательство Юрайт, 2022. – 147 с. – (Профессиональное образование). – ISBN 978-5-534-08452-8. – Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/492727
4. Локоть,В.В. Задачи с параметрами и их решения. Тригонометрия : уравнения, неравенства системы. 10 класс / В. В. Локоть ; ред. С. В. Зотиков. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : АРКТИ, 2004. – 63 с. – (Абитуриент: Готовимся к ЕГЭ. Математика). - ISBN 5-89415-273-9 (10 экз.)
5. Мельников И. И., Сергеев И.Н. Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. – М. Учебно-научный центр довузовского образования МГУ, 1994. – 302 с. (10 экз.)

6. Ященко,И.В. Я сдам ЕГЭ! Математика. Модульный курс. Методика подготовки. Ключи и ответы : учеб. пособие для общеобразоват. организаций : профильный уровень / И. В. Ященко, С. А. Шестаков. – М. : Просвещение, 2017. – 384 с. – ISBN 978-5-09-048716-0 (5 экз.)

9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Открытый колледж. Математика - Режим доступа: https://mathematics.ru/.
2. Математические этюды. - Режим доступа: http://www.etudes.ru/.
3. Федеральный портал «Российское образование» -Режим доступа: http://www.edu.ru.
4. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам» - Режим доступа: *http://www.window.edu.ru.*
5. Портал Электронная библиотека: диссертации-Режим доступа: http://diss.rsl.ru/?menu= disscatalog.
6. Портал научной электронной библиотеки-Режим доступа: http://elibrary.ru/defaultx.asp.
7. Сайт Министерства науки и высшего образования РФ. - Режим доступа: https://minobrnauki.gov.ru.
8. Сайт Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки. - Режим доступа: http://www.obrnadzor.gov.ru/ru.
9. Сайт Министерства просвещения РФ. - Режим доступа: https://edu.gov.ru.
10. Сайт МЦНМО. – Режим доступа: www.mccme.ru

9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. ЭБС «Юрайт». – Режим доступа: https://urait.ru
2. Полпред (обзор СМИ). – Режим доступа: https://polpred.com/news

10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторной доской, компьютером с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, с выходом в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами, учебно-наглядными пособиями (стенды, карты, таблицы, мультимедийные презентации).

- Комплект столов письменных (2-мест.)
- Стол преподавателя
- Пюпитр
- Аудиторная доска
- Компьютер с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением
- Мультимедийный проектор
- Экспозиционный экран
- Копировальный аппарат
- МФУ
- Принтер

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях, оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, в специализированных лабораториях по дисциплине, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ.

Разработчик рабочей программы – доцент кафедры физического и математического образования к. п. н. Е.В. Калабина.

11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2020/2021 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2020/2021 уч. г. на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 10 от «16» июня 2020 г.). В РПД внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 1 № страницы с изменением: на титульном листе	
Исключить:	Включить:
Текст: МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ	Текст: МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Утверждение изменений и дополнений в оценочные материалы для реализации в 2021/2022 уч. г.

РПД обсуждена и одобрена для реализации в 2021/2022 уч. г. без изменений на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 8 от 21.04.2021 г.).

Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2022/2023 уч. г.

РПД пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2022/2023 учебном году на заседании кафедры физического и математического образования (протокол № 1 от 21 сентября 2022 г.).

В рабочую программу внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 2 № страницы с изменением: 23-24	
В Раздел 9 внесены изменения в список литературы, в базы данных и информационно-справочные системы, в электронно-библиотечные ресурсы. Указаны ссылки, обеспечивающие доступ обучающимся к электронным учебным изданиям и электронным образовательным ресурсам с сайта ФГБОУ ВО «БГПУ».	