

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Щёкина Вера Витальевна

Должность: Ректор

Дата подписания: 14.04.2021 09:38:31

Уникальный программный ключ:  
a2232a55157e5765f148910b1f130892af53989420420336ffbf573a434e57789



**МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования**


**«Благовещенский государственный педагогический университет»**

**ОСНОВНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА**

**Рабочая программа дисциплины**

**УТВЕРЖДАЮ**

**Декан естественно-географического  
Факультета ФГБОУ ВО «БГПУ»**

 **И.А. Трофимцова**  
**«28» апреля 2021 г.**

**Рабочая программа дисциплины  
МАТЕМАТИКА**

**Направление подготовки  
05.03.06 ЭКОЛОГИЯ И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЕ**

**Профиль  
«ЭКОЛОГИЯ И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЕ»**

**Уровень высшего образования  
БАКАЛАВРИАТ**

**Принята  
на заседании кафедры  
физического и математического образования  
(протокол № 8 от «21» апреля 2021 г.)**

**Благовещенск 2021**

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА .....</b>	<b>3</b>
<b>2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ .....</b>	<b>6</b>
<b>3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ) .....</b>	<b>8</b>
<b>4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ .....</b>	<b>9</b>
<b>5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ .....</b>	<b>14</b>
<b>6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА.....</b>	<b>37</b>
<b>7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЪЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ.....</b>	<b>43</b>
<b>8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ .....</b>	<b>43</b>
<b>9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ.....</b>	<b>43</b>
<b>10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА .....</b>	<b>44</b>
<b>11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ .....</b>	<b>46</b>

## 1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

**1.1 Цель дисциплины:** формирование базовых знаний, умений и навыков, относящихся к дисциплине «Математика», в объёме, необходимом для владения математическим аппаратом экологических наук. В соответствии с поставленной целью в программе реализуются следующие задачи:

- формирование базовых знаний: основных понятий, теорем и алгоритмов решения задач, относящихся к дисциплине «Математика»;
- показать применения математического аппарата при решении задач, связанных с обработкой информации и анализом данных по экологии и природопользованию.

**1.2 Место дисциплины в структуре ООП:** Дисциплина «Математика» относится к дисциплинам обязательной части блока дисциплин Б1 (Б1.О.10).

Для освоения дисциплины «Математика» используются знания, умения и виды деятельности, сформированные на предыдущем уровне образования.

**1.3 Дисциплина направлена на формирование следующих компетенций:** ОПК-1:

- **ОПК-1.** Способен применять базовые знания фундаментальных разделов наук о Земле, естественнонаучного и математического циклов при решении задач в области экологии и природопользования, **индикаторами** достижения которой являются:

- ОПК-1.1. Понимает основные принципы, законы, методологию физики, математики, химии, биологии, географии;
- ОПК-1.2. Владеет общенаучной терминологией; использует фундаментальные понятия наук о Земле, естественнонаучного и математического циклов в своей профессиональной деятельности;
- ОПК-1.3. Применяет методы наук о Земле, естественнонаучного и математического циклов для интерпретации полученных результатов.

**1.4 Перечень планируемых результатов обучения.** В результате изучения дисциплины студент должен

**знать:**

- основные понятия, их свойства, теоремы и утверждения, алгоритмы дифференциального исчисления функций одной переменной (понятия: функции одной переменной, области определения и множества значений функции, функции, непрерывной в точке, на множестве; производной функции, дифференцируемости функции, дифференциала функции, производной и дифференциала функции второго порядка; основные элементарные функции и их свойства; правила нахождения производных функций, таблицу производных основных элементарных функций; геометрический смысл производной функции в точке; свойства функций, дифференцируемых на отрезке; алгоритмы исследования функций на экстремум и нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке; алгоритм полного исследования функции и построения графика);
- основные понятия, их свойства, формулы и методы интегрального исчисления функций одной переменной (понятия: неопределенный и определенный интеграл, правильной и неправильной рациональной дроби, простейшей дроби, несобственного интеграла от неограниченной функции, несобственного интеграла по неограниченному промежутку; свойства неопределенного и определенного интеграла; формулу Ньютона – Лейбница, методы интегрирования: с помощью таблицы, заменой переменной, по частям, методы интегрирования рациональных функций (простейшие дроби I, II, III типа и методы их интегрирования), тригонометрических функций, некоторых иррациональных функций; приложения интегрального исчисления в геометрии: формулы для вычисления площади плоской фигуры, объёма тела вращения, длины дуги кривой);
- основные законы комбинаторики: правило суммы, правило произведения; понятия: размещения с повторениями, размещения без повторений, перестановки без повторений,

перестановки с повторениями, сочетания без повторений, сочетания с повторениями, формулы, по которым вычисляются указанные величины;

- основные понятия, их свойства, формулы теории вероятностей и их применения (понятия: эксперимент, испытание, исход, элементарное событие, событие, пространство элементарных событий, вероятность события (аксиоматическое, классическое, геометрическое определения), условная вероятность, дискретная случайная величина, непрерывная случайная величина, функция распределения вероятностей НСВ, её свойства, плотность распределения НСВ, нормальное распределение; виды событий, действия над событиями, теоремы сложения и умножения вероятностей, формула полной вероятности, формула Байеса, формула Бернулли, законы распределения вероятностей дискретной случайной величины, числовые характеристики случайных величин: математическое ожидание для ДСВ и НСВ, его свойства, дисперсия ДСВ и НСВ, его свойства, закон больших чисел);

- основные понятия, формулы математической статистики; методы вычисления величин и обработки данных: статистическая совокупность, генеральная совокупность, выборка, объём выборки, повторная и бесповторная выборка, статистическое распределение выборки, полигон и гистограмма, относительная частота, генеральная и выборочная средняя, генеральная и выборочная дисперсии, коэффициент асимметрии, эксцесс, мода, медиана, коэффициент вариации, средняя квадратичная ошибка, выборочное среднее квадратичное отклонение, надёжность (доверительная вероятность), доверительный интервал, линия регрессии, выборочный коэффициент корреляции; методы расчета генеральной и выборочной средней, генеральной и выборочной дисперсии, оценки параметров распределения (несмещенная, состоятельная, эффективная), критерий Пирсона;

**- уметь:**

- решать классические ( типовые ) задачи по дисциплине «Математика», относящиеся к дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной переменной, теории вероятностей и математической статистике: находить область определения функции, строить графики функций с помощью графиков основных элементарных функций, находить производную функции, дифференциал, проводить исследование монотонности функции, находить производную второго порядка, выпуклостей графика функции, проводить исследование функции, построить график, исследовать экстремальные свойства функции, находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, находить неопределенные интегралы и вычислять определенные по таблице, заменяя переменную, по частям, от рациональной, тригонометрической, иррациональной функций, вычислять по определению несобственные интегралы, вычислять площадь, длину дуги кривой, объём тела вращения, применять правила суммы и произведения, используя основные формулы комбинаторики решать задачи на вычисление величин: размещения с повторениями, размещения без повторений, перестановки без повторений, перестановки с повторениями, сочетания без повторений, сочетания с повторениями, находить вероятность событий, используя классическое, геометрическое определения, теоремы сложения и умножения вероятностей, формулу Байеса, формулу Бернулли; находить числовые характеристики дискретной и непрерывной случайных величин, строить сгруппированный статистический ряд, кумуляту, гистограмму, полигон относительных частот;

- находить выборочные точечные характеристики: среднюю, дисперсию, коэффициент асимметрии, эксцесс, моду, медиану, коэффициент вариации; проверять гипотезу относительной близости эмпирического распределения к нормальному; находить точечные оценки математического ожидания и дисперсии, доверительные интервалы для математического ожидания, среднего квадратичного отклонения нормального распределения, погрешности оценок; проверять с помощью критерия Пирсона согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением выборки; устанавливать форму корреляционной зависимости (линейной), оценивать тесноту корреляционной связи, вычисляя выборочный коэффициент корреляции, проверять гипотезу о значимости коэффициента корреляции

- применять методы дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной, теории вероятностей и математической статистики при проведении исследований, как при решении классических математических задач, так и при решении задач, относящихся к экологии и природопользованию;

**- владеть:**

- знаниями основных математических понятий, методами вычисления математических величин, обработки данных, необходимых по экологии и природопользованию;

- навыками практического использования математического аппарата дисциплины в расчетах, связанных с экологией и природопользованием: умениями находить область определения функции, вычислять значения функции и её производной в точке, используя правила дифференцирования находить производную функции, исследовать монотонность и экстремальные свойства функции и находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, находить неопределенные интегралы и вычислять определенные по таблице, заменяя переменную, по частям, интегрировать простейшие дроби I, II, III типа, вычислять площадь криволинейной трапеции, используя основные законы и формулы комбинаторики решать задачи на вычисление величин: размещения с повторениями, размещения без повторений, перестановки без повторений, перестановки с повторениями, сочетания без повторений, сочетания с повторениями, находить вероятность событий, используя классическое определение вероятности, находить числовые характеристики дискретной и непрерывной случайных величин по готовым формулам, по предложенным алгоритмам, плану, используя формулы строить сгруппированный статистический ряд, кумуляту, гистограмму, полигон относительных частот; находить выборочные точечные характеристики: среднюю, дисперсию, коэффициент асимметрии, эксцесс, моду, медиану, коэффициент вариации; проверять гипотезу относительной близости эмпирического распределения к нормальному; находить точечные оценки математического ожидания и дисперсии, доверительные интервалы для математического ожидания, среднего квадратического отклонения нормального распределения, погрешности оценок; проверять с помощью критерия Пирсона, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением выборки; устанавливать форму корреляционной зависимости (линейной), оценивать тесноту корреляционной связи, вычисляя выборочный коэффициент корреляции, проверять гипотезу о значимости коэффициента корреляции.

### **1.5 Общая трудоемкость**

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы (108 часов).

Программа предусматривает изучение материала на лекциях, практических и лабораторных занятиях. Предусмотрена самостоятельная работа студентов по темам и разделам. Проверка знаний осуществляется фронтально, индивидуально.

### **1.6 Объем дисциплины и виды учебной деятельности**

#### **Объем дисциплины и виды учебной деятельности**

Вид учебной работы	Всего часов	Семестры
		1
Общая трудоемкость	108	108
Аудиторные занятия	64	64
Лекции	24	24
Практические занятия	40	40
Самостоятельная работа	44	44
Вид итогового контроля:		зачет

## 2 УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

### 2.1 Очная форма обучения

#### Учебно-тематический план

Наименование разделов (тем)	Всего часов	Аудиторные занятия		Самостоятельная работа
		Лекции	Практические	
1. Математический анализ: дифференциальное исчисление функций одной переменной	22	6	6	10
2. Математический анализ: интегральное исчисление функций одной переменной	28	4	8	16
3. Элементы комбинаторики	8	2	2	4
4. Элементы теории вероятностей	26	6	8	12
5. Элементы математической статистики	24	4	8	12
<b>ВСЕГО:</b>	108	22	32	54

#### Интерактивное обучение по дисциплине

Тема занятия	Форма занятия	Интерактивная форма организации учебной работы	Кол-во часов
Понятие функция, область определения функции. Свойства функции. Дифференцируемость функции. Производная и дифференциал, их геометрический и механический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Правила дифференцирования. Таблица производных.	Лекция	Доказательства правил и табличных формул	0,5
Производная и дифференциал функции. Геометрический смысл производной и дифференциала функции в точке	Практическое занятие	Работа в парах	0,5
Свойства дифференцируемых функций (теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа). Признаки постоянства, возрастания и убывания функции на промежутке. Максимум и минимум. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.	Лекция	Работа по группам	0,5
Производные и дифференциалы высших порядков. Выпуклые функции. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций.	Лекция	Работа по группам	0,5
Производные и дифференциалы высших порядков. Свойства функций, дифференцируемых на отрезке.	Практическое занятие	Работа по группам	0,5
Исследование функций с помощью производных и построение графиков функций.	Практическое занятие	Работа в парах	1
Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Интегрирование по ча-	Лекция	Работа в парах	0,5

стям. Интегрирование заменой переменной. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических и простейших иррациональных функций.			
Первообразная и неопределённый интеграл. Интегрирование заменой переменной и по частям неопределённых интегралов	Практическое занятие	Работа по группам	1
Интегрирование рациональных функций	Практическое занятие	Работа в парах	0,5
Интегрирование тригонометрических и некоторых иррациональных функций	Практическое занятие	Работа в парах	1
Несобственный интеграл	Практическое занятие	Работа в парах	0,5
Применение интегрального исчисления	Практическое занятие	Выступление студентов с решёнными задачами	0,5
Основные правила и формулы комбинаторики	Практическое занятие	Решение задач по группам	1
Определения вероятности события. Теоремы сложения и умножения вероятностей.	Практическое занятие	Работа в парах	0,5
Формула полной вероятности, формула Байеса.	Практическое занятие	Работа в парах	0,5
Виды случайных величин. Функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей случайной величины. Основные числовые характеристики случайных величин.	Лекция	Работа в парах	0,5
Дискретные случайные величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин.	Практическое занятие	Работа в парах	0,5
Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.	Практическое занятие	Работа в парах	0,5
Нормальное распределение. Закон больших чисел	Практическое занятие	Работа в парах	1
Основные понятия математической статистики. Статистические методы обработки экспериментальных данных. Выборочный метод	Практическое занятие	Работа в парах	2
Статистические оценки параметров распределения	Практическое занятие	Работа в парах	2
Корреляционный анализ	Практическое занятие	Работа в парах	2
Статистическая проверка статистических гипотез	Практическое занятие	Работа в парах	2
<b>ВСЕГО</b>			<b>20</b>

### 3 СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ (РАЗДЕЛОВ)

#### **Раздел 1. Математический анализ: дифференциальное исчисление функций одной переменной**

Тема 1. Производная и дифференциал: Понятие функция, область определения функции. Свойства функции. Дифференцируемость функции. Производная и дифференциал, их геометрический. Непрерывность дифференцируемой функции. Дифференцирование суммы, произведения, частного. Дифференцирование сложной функции. Производная обратной функции. Таблица производных. Производные высших порядков.

Тема 2. Применения производной к исследованию функций и построению графиков: Основные теоремы дифференциального исчисления (теорема Ферма, теорема Ролля, теорема Лагранжа). Применение производной к исследованию монотонности функции. Исследование экстремума функции. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Исследование выпуклостей графика функции. Асимптоты. Полное исследование функции и построение графика.

#### **Раздел 2. Математический анализ: интегральное исчисление функций одной переменной**

Тема 1. Неопределенный интеграл: Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических и простейших иррациональных функций.

Тема 2. Определенный интеграл: Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной. Некоторые приложения определенного интеграла (вычисление площадей плоских фигур, вычисление объема тела, вычисление длины гладкой дуги). Несобственные интегралы I и II рода, их свойства. Геометрический смысл несобственных интегралов.

#### **Раздел 3. Элементы комбинаторики**

Основные законы комбинаторики: правило суммы, правило произведения. Основные формулы комбинаторики: размещения с повторениями, размещения без повторений, перестановки без повторений, перестановки с повторениями, сочетания без повторений, сочетания с повторениями.

#### **Раздел 4. Элементы теории вероятности**

Тема 1. Случайные события:

1. Основные понятия теории вероятностей: Испытания и события. Виды случайных событий. Соотношения между событиями. Полная группа событий. Классическое определение вероятности. Статистическое определение вероятности. Геометрическое определение вероятности.

2. Свойства вероятности: Теорема сложения вероятностей. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Свойства независимых событий. Попарная независимость событий и независимость в совокупности. Противоположные события. Вероятность появления хотя бы одного события. Принцип практической невозможности маловероятных событий. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Приложения в биологии.

3. Повторение испытаний: Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Локальные приближения формулы Бернулли: теорема Пуассона, локальная теорема Лапласа. Интегральная теорема и формула Лапласа. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.

Тема 2. Случайные величины:

1. Виды случайных величин. Функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей случайной величины: Понятие случайной величины. Дискретные случайные величины. Законы распределения ДСВ. Биномиальное распределение. Распределение Пуассона. Геометрическое распределение. Гипергеометрическое распределение.



ление. Функция распределения вероятностей СВ и ее свойства. Плотность распределения вероятностей непрерывной СВ, свойства плотности вероятности. Вероятностный смысл плотности вероятности. Равномерное распределение.

2. Основные числовые характеристики случайных величин: Математическое ожидание дискретной и непрерывной СВ, его свойства. Вероятностный смысл математического ожидания. Дисперсия дискретной и непрерывной СВ, её свойства. Среднее квадратическое отклонение СВ. Математическое ожидание и дисперсия СВ, имеющих распределения: биномиальное, Пуассона, равномерное.

3. Нормальное распределение: Плотность вероятности нормально распределенной СВ. Числовые характеристики нормально распределенной СВ. График плотности вероятностей нормально распределенной СВ. Вероятность попадания СВ в заданный интервал. Вероятность отклонения нормальной СВ от математического ожидания. Правило трех сигм. Центральная предельная теорема.

4. Закон больших чисел: Понятие о законе больших чисел. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Теорема Чебышева и ее следствие. Теорема Бернулли и ее следствие (теорема Пуассона).

### **Раздел 5. Элементы математической статистики**

Тема 1. Задачи математической статистики. Основные понятия. Статистические методы обработки экспериментальных данных: Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Повторная и бесповторная выборки. Репрезентативная выборка. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения. Кумулята. Полигон и гистограмма. Центральные эмпирические моменты. Эмпирические и выравнивающие частоты, методика расчета. Построение нормальной кривой по опытным данным. Оценка отклонения эмпирического отклонения от нормального. Асимметрия. Эксцесс. Мода. Медиана.

Тема 2. Статистические оценки параметров распределения: Статистические оценки параметров распределения. Требования к оценкам. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известном и при неизвестном  $\sigma$ . Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения.

Тема 3. Корреляционный анализ: Корреляционный анализ. Условные средние. Выборочные уравнения регрессии. Отыскание уравнений прямых регрессий методом наименьших квадратов. Корреляционная таблица. Отыскание прямых регрессий по сгруппированным данным. Выборочный коэффициент корреляции, его свойства.

Тема 4. Статистическая проверка статистических гипотез: Статистическая гипотеза. Нулевая и конкурирующая гипотеза. Статистический критерий проверки нулевой гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Наблюдаемое значение критерия. Критическая область. Критические точки. Область принятия гипотезы. Критерий согласия Пирсона.

## **4 МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ (УКАЗАНИЯ) ДЛЯ СТУДЕНТОВ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

Данные рекомендации предназначены для студентов естественно-географического факультета направления подготовки бакалавра «05.03.06 Экология и природопользование».

Процесс обучения указанной дисциплине преследует следующие цели:

- ознакомить студентов с основными понятиями математики, методами решения математических задач, необходимыми для обработки и анализа данных,
- научно обосновать теоремы и утверждения дисциплины,
- продолжить развитие математической культуры логических рассуждений и правильной устной и письменной математической речи.

В результате изучения дисциплины студент **должен иметь представление** о месте и роли математики в естественных науках, об использовании методов математики в естественных науках; **должен знать** основные понятия, теоремы курса, виды моделей и способы их построения, предлагаемые этой дисциплиной, методы решения основных типов задач; **должен уметь** исследовать функциональные зависимости, вычислять геометрические величины, используя интегральное исчисление, вычислять вероятности событий, проводить статистическую обработку данных, проводить вычисления, необходимые для теоретических работ по экологии и природопользованию.

Теоретический материал курса представлен планом лекционных занятий с указанием вопросов, рассматриваемых на каждой лекции.

Учебно-методические материалы по подготовке практических занятий содержат планы проведения занятий с указанием последовательности рассматриваемых тем, задания для решения в группе и задания для самостоятельной работы.

В рабочей программе представлен примерный вариант контрольных и самостоятельных работ, которые позволяют проверить уровень усвоения изученного материала.

Рабочая программа содержит программу зачета, которая позволит наиболее эффективно организовать подготовку к этому мероприятию. При подготовке к занятиям и зачету студенты могут использовать литературу, приведенную в рабочей программе.

Подготовку к зачету наиболее рационально осуществлять путем повторения и систематизации курса с помощью кратких конспектов. При работе с теоретическим материалом студент должен уяснить наиболее важные идеи каждой темы, уметь пользоваться основными понятиями и утверждениями (знать их формулировки, демонстрировать их использование на примерах, понимать условия применения и т.д.). Как правило, каждая тема, изученная в рамках курса, содержит ряд основных задач, приемами и методами решения которых должен владеть студент.

Изучать материал рекомендуется по плану, представленному в плане лекций. После изучения теоретических основ каждой темы рекомендуется выполнить задания из практического занятия, задания, предлагаемые в домашних работах; после изучения темы необходимо выполнить соответствующую контрольную работу (перечень всех форм самостоятельной работы студента приведен в таблице «Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математика»). Далее, подготовившись к зачету согласно программе зачета, приступить к его сдаче.

### План лекций

Тема	Часы	Литература	Самостоятельная работа
<b>Раздел I. Математический анализ: дифференциальное исчисление функций одной переменной</b>	<b>6</b>	[3], [5], [7], [9], [11] – [15], [17], [20], [21] [24] – [28].	
1. Понятие функция, область определения функции. Свойства функции. Дифференцируемость функции. Производная и дифференциал, их геометрический и механический смысл. Непрерывность дифференцируемой функции. Правила дифференцирования. Таблица производных.	2		Основные элементарные функции, их свойства, графики (заполнить таблицу). Доказательства правил и табличных формул. Нахождение производных функций.

2. Свойства дифференцируемых функций (теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа). Признаки постоянства, возрастания и убывания функции на промежутке. Максимум и минимум. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.	2		Знакомство с доказательствами теорем. Исследование монотонности функции, поиск экстремумов функции. Исследование функций и построение графиков. Решение текстовых задач
3. Производные и дифференциалы высших порядков. Выпуклые функции. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций.	2		Исследование выпуклости и вогнутости функции. Полное исследование функции и построение графиков.
<b>Раздел II. Математический анализ: интегральное исчисление функций одной переменной</b>	4	[2], [3], [7], [9], [12], [14], [15], [20], [22] - [25], [29], [30].	
1. Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование тригонометрических и простейших иррациональных функций.	1		Знакомство с доказательствами свойств неопределенных интегралов и табличных формул. Нахождение первообразных по таблице. Нахождение неопределенных интегралов.
2. Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование по частям. Интегрирование заменой переменной.	1		Знакомство с доказательствами теорем. Вычисление определенных интегралов.
3. Некоторые приложения определенного интеграла (вычисление площадей плоских фигур, вычисление объема тела, вычисление длины гладкой дуги). Несобственные интегралы I и II рода, их свойства. Геометрический смысл несобственных интегралов.	2		Знакомство с доказательствами формул. Решение задач.
<b>Раздел III. Элементы ком-</b>	2	[1], [4]	Решение задач

<b>бинаторики</b>			
<b>Раздел IV. Элементы теории вероятностей</b>	6	[1], [4], [6], [8], [10], [16], [18], [19].	
1. Основные понятия теории вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей и их следствия. Повторение испытаний	2		Геометрическая вероятность. Формула полной вероятности. Формулы Байеса. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях.
2. Виды случайных величин. Функция распределения вероятностей и плотность распределения вероятностей случайной величины. Основные числовые характеристики случайных величин.	2		Вероятностный смысл математического ожидания. Доказательства свойств математического ожидания и дисперсии.
3. Нормальное распределение. Закон больших чисел	2		Исследовать методами дифференциального исчисления и построить график плотности нормального распределения. Самостоятельно провести доказательство неравенства Чебышева для случая дискретных случайных величин.
<b>Раздел V. Элементы математической статистики</b>	4	[1], [4], [8], [10], [16] – [19].	
1. Основные понятия математической статистики. Выборочный метод. Статистическая гипотеза. Статистический критерий проверки гипотезы. Уровень значимости. Мощность критерия. Критические области. Критерий знаков. Критерий Крамера-Уэлча.	2		Выборочный метод (подготовка к лабораторной работе). Критерий Крамера – Уэлча (подготовка к лабораторной работе).
2. Критерий хи-квадрат. Критерий Фишера. Метод наименьших квадратов. Понятие корреляционной связи. Корреляционное отношение. Коэффициент вариации. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена. Коэффициент корреляции Пирсона.	2		Критерий хи-квадрат. (подготовка к лабораторной работе). Критерий Фишера. (подготовка к лабораторной работе). Метод наименьших квадратов. (подготовка к лабораторной работе). Коэффициент корреляции Пирсона. (подготовка к лабораторной работе).
Всего:	24		

**Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математика»**

№	Наименование раздела (темы)	Формы/виды самостоятельной работы	Количество часов, в соответ-
---	-----------------------------	-----------------------------------	------------------------------

			ствии с учебно-тематическим планом
1.	Раздел I. Математический анализ: дифференциальное исчисление функций одной переменной	1. Подготовка к практическим занятиям. 2. Выполнение домашних работ. 3. Основные элементарные функции, их свойства, графики (заполнить таблицу). 4. Подготовка и выполнение домашней контрольной работы «Дифференциальное исчисление функций одной переменной». 5. Доказательство правил, табличных формул, теорем. 6. Подготовка к зачету	10
2.	Раздел II. Математический анализ: интегральное исчисление функций одной переменной	1. Подготовка к практическим занятиям. 2. Выполнение домашних работ. 3. Знакомство с доказательствами теорем. 4. Подготовка и выполнение домашней контрольной работы «Интегрирование функций одной переменной» 5. Подготовка к зачету.	16
3.	Раздел III. Элементы комбинаторики	1. Подготовка к практическому занятию. 2. Выполнение домашней работы. 3. Подготовка к зачету.	4
4.	Раздел IV. Элементы теории вероятностей	1. Подготовка к практическим занятиям. 2. Выполнение домашних работ. 3. Подготовка к домашней контрольной работе «Теория вероятностей». 4. Изучение тем: - Геометрическая вероятность. - Формула полной вероятности. Формулы Байеса. - Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях. - Вероятностный смысл математического ожидания. - Свойства математического ожидания и дисперсии. - Неравенство Чебышева для случая дискретных случайных величин. 5. Подготовка к выполнению групповых домашних заданий по темам	12

		«Дискретные случайные величины», «Непрерывные случайные величины», «Нормальное распределение». 6. Подготовка к зачету.	
5.	Раздел V. Элементы математической статистики	1. Подготовка к практическим занятиям. 2. Выполнение домашних работ. 3. Подготовка к зачету.	12
<b>Итого</b>			<b>54</b>

## 5 ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### План практических занятий

Тема	Часы	Литература	Самостоятельная работа
<b>Раздел I. Математический анализ: дифференциальное исчисление функций одной переменной</b>	<b>6</b>	[3], [7], [9], [11] - [15], [20], [21], [24] – [28]	
1. Производная и дифференциал функции. Геометрический смысл производной и дифференциала функции в точке	2		Выполнение домашних заданий и подготовка в домашней контрольной работе «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»
2. Производные и дифференциалы высших порядков. Свойства функций, дифференцируемых на отрезке.	2		
3. Исследование функций с помощью производных и построение графиков функций.	2		
<b>Раздел II. Математический анализ: интегральное исчисление функций одной переменной</b>	<b>8</b>	[2], [3], [7], [9], [12] [15], [20], [22] - [25], [29], [30]	
4. Первообразная и неопределённый интеграл. Интегрирование заменой переменной и по частям неопределённых интегралов	2		Выполнение домашних заданий и подготовка в домашней контрольной работе «Интегрирование функций одной переменной»
5. Интегрирование рациональных функций	1		
6. Интегрирование тригонометрических и некоторых иррациональных функций	1		
7. Определённый интеграл	1		
8. Несобственные интегралы	1		
9. Применение интегрального исчисления	2		
<b>Раздел III. Элементы комбинаторики</b>	<b>2</b>	[1], [3], [6], [8], [10], [16], [18], [19]	
10. Основные правила и формулы комбинаторики.	2		Выполнение домашних заданий.
<b>Раздел IV. Элементы теории вероятностей</b>	<b>8</b>	[1], [3], [6], [8], [10], [16], [18], [19]	
11. Определения вероятности события. Теоремы сложения и умножения веро-	2		Выполнение домашних заданий. Выполнение домаш-

ятностей.			ней контрольной работе «Теория вероятностей»
12. Формула полной вероятности, формула Байеса.	1		
13. Повторение испытаний	1		
14. Дискретные случайные величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин.	1		Выполнить групповое домашнее задание по теме «Дискретные случайные величины».
15. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.	1		Выполнить групповое домашнее задание по теме «Непрерывные случайные величины».
16. Нормальное распределение. Закон больших чисел.	2		Выполнить групповое домашнее задание по теме «Нормальное распределение».
<b>Раздел V. Элементы математической статистики</b>	8	<b>[1], [3], [6], [8], [10], [16] - [19]</b>	
17. Основные понятия математической статистики. Статистические методы обработки экспериментальных данных. Выборочный метод	2		Подготовка к практическим занятиям, выполнение домашних работ
18. Статистические оценки параметров распределения.	2		
19. Корреляционный анализ	2		
20. Статистическая проверка статистических гипотез.	2		
Всего:	40		

### Практические занятия

#### Раздел I. Математический анализ: дифференциальное исчисление функций одной переменной

##### Практическое занятие 1. Производная и дифференциал функции. Геометрический смысл производной и дифференциала функции в точке

I. Найдите производные и дифференциалы следующих функций:

- $y = 3x^{15} + 2x^{10} - x^3 - 5x^2 + x - 4$ ,
- $y = 2x^{80} + x^{100} - x^{20} - 7x^{50} + 100x$ ,
- $y = \sqrt[5]{x}$ ,
- $y = x^{\frac{1}{4}} - 8x^{\frac{1}{16}} + 6x^{\frac{1}{2}} + 30x^{\frac{1}{8}} - 28x^{\frac{1}{2}}$ ,
- $y = \sqrt[2]{x} - 4 \cdot \sqrt[4]{x} - 6 \cdot \sqrt[8]{x} + 8\sqrt{x}$ ,
- $y = x\sqrt{x} - x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ ,
- $y = \cos x + \sin x + \operatorname{tg} x$ ,
- $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ ,
- $y = (\sin x + \cos x)^3$ ,
- $y = \sin 3x - \cos 6x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 4x$ ,
- $y = \frac{1}{\cos^4 x}$ ,
- $y = \sin^{-4} x$ ,
- $y = \frac{\sin x - \cos x}{\operatorname{tg} x}$ ,
- $y = -7 \operatorname{arctg} x$ ,
- $y = \operatorname{arcctg} 4x$ ,
- $y = x^2 \cdot \arccos x$ ,
- $y = \arcsin \sqrt{x}$ ,
- $y = (e^x + 1)^3$

$$19. y = (x^4 + 2x^2 + 1) \cdot 7^x, \quad 20. y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2^x, \quad 21. y = \frac{1}{e^x + 1},$$

$$22. y = (x^2 - 1)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{3x}, \quad 23. y = \ln(x^3 - 4x^2 + 6x - 8), \quad 24. y = \log_3(9x - 18).$$

II. Найдите значение производной в указанной точке:

$$1. y = x \cdot \sqrt{x} + 3 \lg x - 2, \quad x_0 = 1, \quad 2. y = \frac{2^{5x}}{5^{2x}}, \quad x_0 = 0, \quad 3. y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1.$$

III. Найдите угол, под которым кривая  $y = \ln x$  пересекает ось абсцисс.

IV. Найдите угол, под которым кривая  $y = (x-1) \cdot (x+3)$  пересекает ось абсцисс.

V. Вычислите приближённо значения:

$$1) \ln 1,02, \quad 2) \sqrt{24}, \quad 3) \sin 29^\circ, \quad 4) \operatorname{arctg} 1,05, \quad 5) (0,99)^4.$$

Работа в парах: нахождение производных.

**Домашнее задание по теме «Производная и дифференциал функции. Геометрический смысл производной и дифференциала функции в точке»**

1. Найти производные следующих функций:

$$1) y = 2x^3 - 14x^2 + 7x - 24, \quad 2) y = \sqrt[8]{x^3} + \sqrt[4]{x^7}, \quad 3) y = \sqrt[3]{x^{27}},$$

$$4) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{5}{x^9} + \sqrt{2} \cdot x, \quad 5) y = -\operatorname{ctg} x, \quad 6) y = \arcsin x,$$

$$7) y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \sin x + \cos x, \quad 8) y = \sin^3 x + \cos^4 x, \quad 9) y = \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x - \sin x},$$

$$10) y = \operatorname{tg} x + x - \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 11) y = \sin \frac{x}{5} + \operatorname{ctg} \frac{x}{10} + \cos \frac{x}{15} - \operatorname{tg} \frac{x}{20}, \quad 12) y = (3x - 2)^{16},$$

$$13) f(t) = \frac{e^t}{1 - e^t}, \quad 14) u(v) = \frac{2^v - 1}{1 + 2^v}, \quad 15) z = (\sqrt{y} + 1) \cdot \arccos y,$$

$$16) y = x \cdot \log_2 x, \quad 17) y = \ln(x + \sqrt{x}), \quad 18) y = \log_5(2x^5 + 3x^4),$$

$$19) y = 3^{\sin x}, \quad 20) y = 10 \arccos \frac{x}{2}, \quad 21) y = \frac{(3x + 2) \cdot \sqrt{3 - 2x - x^2}}{2},$$

$$22) y = \frac{\ln(x^2 + 2)}{2}, \quad 23) y = \frac{2 - x}{x^2 - 2}, \quad 24) y = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} x$$

2. Найдите значение производной в указанной точке:

$$1) y = x^3 \cdot e^x, \quad x_0 = -2, \quad 2) y = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4, \quad 3) y = \log_{0,5} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}, \quad x_0 = 2.$$

3. Найдите угол, под которым кривая  $y = \log_4 x$  пересекает ось абсцисс.

4. Найдите угол, под которым кривая  $y = x^2 - 1$  пересекает ось абсцисс.

5. Вычислите приближённо значения: 1)  $\sqrt[3]{26}$ , 2)  $\operatorname{tg} 44^\circ$ , 3)  $(1,02)^5$ .

6. Выучить правила и формулы дифференцирования, геометрический смысл производной и дифференциала (подготовка к домашней контрольной работе).

## Практическое занятие 2. Производные и дифференциалы высших порядков. Свойства функций, дифференцируемых на отрезке

1. Найдите производные и дифференциалы указанных порядков:

$$1) y = -x \cdot \cos x, \quad y'', \quad d^2 y; \quad 2) y = \ln^2 x, \quad y''', \quad d^3 y; \quad 3) y = e^{2x}, \quad y^{(5)}, \quad d^5 y;$$



4)  $y = \sin^2 x, y'', d^2 y;$       5)  $y = \frac{1}{4x-1}, y''', d^3 y;$       6)  $y = e^x \cdot (x+1), y^{(3)}, d^3 y.$

2. Проверьте справедливость теоремы Ролля для функции на указанном промежутке. Найдите соответствующее значение  $c$ , если оно существует.

1)  $f(x) = |x| - 2, [-2; 2];$  2)  $f(x) = \cos x, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right].$

3. Проверьте справедливость теоремы Лагранжа для функции на указанном промежутке.

Найдите соответствующее значение  $c$ , если оно существует. 1)  $f(x) = \frac{1}{x}, \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right];$  2)

$f(x) = |x-1|, [0; 3].$

4. Найдите точку, в которой касательная к кривой  $y = x^2 - 4x$  параллельна хорде, соединяющей точки  $A(1; -3)$  и  $B(5; 5).$

**Домашнее задание по теме «Производные и дифференциалы высших порядков. Свойства функций, дифференцируемых на отрезке»**

1. Найдите производные и дифференциалы указанных порядков:

1)  $y = \sin 3x, y''', d^3 y;$       2)  $y = \operatorname{tg} 3x, y'', d^2 y;$       3)  $y = x \cdot \ln x, y''', d^3 y;$

4)  $y = \ln \cos x, y'', d^2 y;$       5)  $y = 5^x, y^{(5)}, d^5 y.$

2. Проверьте справедливость теоремы Ролля для функции на указанном промежутке. Найдите соответствующее значение  $c$ , если оно существует.

1)  $f(x) = -x^2 + 4x - 3, [0; 4];$       2)  $f(x) = \sqrt[5]{x^2}, [-1; 1].$

3. Проверьте справедливость теоремы Лагранжа для функции  $f(x) = e^x$  на промежутке  $[0; 1].$  Найдите соответствующее значение  $c$ , если оно существует.

4. Найдите точку, в которой касательная к кривой  $y = \ln x$  параллельна хорде, соединяющей точки  $A(1; 0)$  и  $B(e; 1).$

5. Выучить свойства дифференцируемых функций (подготовка к домашней контрольной работе).

### Практическое занятие 3. Исследование функций с помощью производных и построение графиков функций

1. Найдите интервалы возрастания и убывания функций. Исследуйте функцию на экстремум:

1)  $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x+2);$       2)  $g(x) = \ln(x^2 - 2x + 4);$       3)  $s(t) = t + \cos t;$

4)  $h(x) = \frac{\ln x}{x};$       5)  $u(x) = \frac{x}{x^2 + 1};$       6)

$y = x - \operatorname{arctg} x.$

2. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба следующих графиков функций:

1)  $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2};$       2)  $p(x) = x^4 - 4x^3 + 48x^2 + 6x - 9;$       3)  $y = e^{-x^2};$       4)  $x = t \cdot \operatorname{arctg} x$

3. Проведите полное исследование следующих функций и постройте их графики:

1)  $y = 2x^2 + \frac{1}{x};$  2)  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}};$  3)  $f(x) = e^{\frac{1}{x+2}};$  4)  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x;$  5)  $y = \frac{3x-2}{5x^2}.$

4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке:

1)  $y = \sin 4x + \cos 4x, \left[0; \frac{\pi}{3}\right];$       2)  $y = x + 2\sqrt{x}, [0; 4].$

Работа по группам: исследование возрастания и убывания функции, экстремума функции, проведение исследования функций и построение графиков функций

**Домашнее задание по теме: «Исследование функций с помощью производных и построение графиков функций»**

1. Найдите интервалы возрастания и убывания функций. Исследуйте функцию на экстремум:

- 1)  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$ ;                      2)  $g(x) = x + e^{-x}$ ;                      3)  $u(x) = \frac{1}{1-x^2}$ ;  
 4)  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$ ;                      5)  $y = e^{x^2-4x+5}$ .

2. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба следующих графиков функций:

- 1)  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ ;                      2)  $y = \cos x$ .

3. Проведите полное исследование следующих функций и постройте их графики:

- 1)  $f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$ ;    2)  $g(x) = \ln(1-x^2)$ ,    3)  $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ ;    4)  $y = x + \frac{1}{x}$ ;    5)  $y = x^2 \cdot e^{-x}$ .

4. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке:

- 1)  $y = 3x - x^3$ ,  $[-2; 3]$ ;                      2)  $y = x^4 - 2x^2 + 3$ ,  $[-3; 2]$ .

5. Выучить алгоритмы исследования монотонности функции, выпуклостей графика функции, исследования функции (подготовка к домашней контрольной работе).

6. Выполнение домашней контрольной работы «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» (сдать на 5 практическом занятии).

## Раздел II. Математический анализ: интегральное исчисление функций одной переменной

### Практическое занятие 4. Первообразная и неопределённый интеграл.

#### Интегрирование заменой переменной и по частям неопределённых интегралов

I. Найдите интегралы, применяя таблицу неопределённых интегралов:

- 1)  $\int \frac{dx}{x^3}$ ,                      2)  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ ,                      3)  $\int 2^x dx$ ,                      4)  $\int (x^{10} + \sqrt[4]{x}) dx$ ,  
 5)  $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx$ ,    6)  $\int \sqrt[5]{x} (x^3 - x - 1) dx$ ,    7)  $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$ ,    8)  $\int \left( 7^x - \frac{8}{x} \right) dx$ ,  
 9)  $\int (4 \cos x + 8 \sin x - 2 \cos 6 - 4 \sin 7) dx$ ,    10)  $\int \left( \frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sqrt{3} \sin^2 x} \right) dx$ ,  
 11)  $\int e^x \cdot (2^x + 3^x) dx$ ;    12)  $\int (x+1)^2 \cdot (2x-1) dx$ ,    13)  $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ ,  
 14)  $\int (4 - \sqrt{x})^2 dx$ ,    15)  $\int \frac{3^x + 4^x}{7^x} dx$ .

II. Используя надлежащую замену, найдите интегралы:

- 1)  $\int \cos 7x dx$ ,    2)  $\int \sin(5x - 2) dx$ ,    2)  $\int \frac{dx}{\cos^2 6(x-1)}$ ,    3)  $\int \frac{dx}{x^2 + 3}$ ,  
 4)  $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 5x^2}}$ ,    5)  $\int (1 - 4x)^{11} dx$ ,    6)  $\int \frac{dx}{(6x + 11)^4}$ ,    7)  $\int \frac{dx}{9x + 7}$ ,  
 8)  $\int 3^{2-11x} dx$ ,    9)  $\int \operatorname{ctg} x dx$ ,    10)  $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx$ ,    11)  $\int \cos^3 x \sin x dx$ ,

$$12) \int \frac{2x dx}{x^4 + 7}, \quad 13) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2 \cos x}}, \quad 14) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx, \quad 15) \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx.$$

III. Используя метод интегрирования по частям, найдите интегралы:

$$1) \int x \ln x dx, \quad 2) \int x \sin x dx, \quad 3) \int x^2 e^x dx, \quad 4) \int e^x \cos x dx, \\ 5) \int \ln^2 x dx, \quad 6) \int \operatorname{arctg} x dx, \quad 7) \int (x^2 - 4x + 1) \cdot 2^x dx.$$

Работа по группам: нахождение неопределённых интегралов разными методами.

**Домашнее задание по теме: «Первообразная и неопределённый интеграл. Интегрирование заменой переменной и по частям неопределённых интегралов»**

I. Найдите интегралы, применяя таблицу неопределённых интегралов:

$$1) \int (1-x) \cdot (1-2x) \cdot (1-3x) dx; \quad 2) \int \left( \frac{1-x}{x} \right)^2 dx; \quad 3) \int \left( \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} \right) dx; \quad 4) \int \frac{1+x}{\sqrt{x}} dx; \\ 5) \int \frac{\sqrt{x} - 2 \cdot \sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx; \quad 6) \int (2^x + 3^x)^2 dx; \quad 7) \int \frac{11^x - 9^x}{10^x} dx; \quad 8) \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx; \\ 9) \int (1 + \cos x + \sin x) dx; \quad 10) \int \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} dx.$$

II. Используя надлежащую замену, найдите интегралы:

$$1) \int (2x-3)^{10} dx; \quad 2) \int \sqrt[3]{1-3x} dx; \quad 3) \int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}; \quad 4) \int \frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}; \\ 5) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 6) \int x^2 \cdot \sqrt[3]{1+x^3} dx; \quad 7) \int \frac{x dx}{3-2x^2}; \quad 8) \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}; \\ 9) \int \cos x \sin^5 x dx; \quad 10) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}; \quad 11) \int \operatorname{tg} x dx.$$

III. Используя метод интегрирования по частям, найдите интегралы:

$$1) \int \ln x dx; \quad 2) \int x e^x dx; \quad 3) \int x \cos x dx; \quad 4) \int \operatorname{arctg} x dx; \quad 5) \int \arcsin x dx.$$

IV. Выучить таблицу первообразных, методы интегрирования по частям и заменой переменной (подготовка к домашней контрольной работе).

### Практическое занятие 5. Интегрирование рациональных функций

1. Представить рациональную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$1) f(x) = \frac{7x+4}{x^2-x-6}, \quad 2) f(x) = \frac{x^2+5x-2}{(x^2-1) \cdot (x+1)}, \quad 3) f(x) = \frac{x^5-1}{x^3+x^2+x}.$$

2. Найти неопределённые интегралы:

$$1) \int \frac{5}{x+\sqrt{2}} dx, \quad 2) \int \frac{4}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^3} dx, \quad 3) \int \frac{7}{(x+3)^6} dx, \quad 4) \int \frac{dx}{(3x+2)^4}, \\ 5) \int \frac{x+1}{x-1} dx, \quad 6) \int \frac{5x+1}{10x-20} dx, \quad 7) \int \frac{2x-3}{(x-1) \cdot (x+2)} dx, \quad 8) \int \frac{x dx}{x^2-4x-5}, \\ 9) \int \frac{x-1}{(x+1) \cdot (x^2-4)} dx, \quad 10) \int \frac{6x-7}{x^2+4x+13} dx, \quad 11) \int \frac{dx}{x^2+10x+29}, \\ 12) \int \frac{x+6}{x^2-2x+17} dx, \quad 13) \int \frac{4x-1}{x^2+x+1} dx, \quad 14) \int \frac{dx}{x^4+x^2}.$$

Работа в парах: представление рациональных функций в виде суммы простейших дробей.

**Домашнее задание по теме: «Интегрирование рациональных функций»**

1. Представить рациональную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} 1) f(x) &= \frac{2x-3}{x^2-3x-10}, & 2) f(x) &= \frac{x+2}{x^2-6x+5}, & 3) f(x) &= \frac{1}{x^4+x^2}, \\ 4) f(x) &= \frac{1}{x^3-8}, & 5) f(x) &= \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}. \end{aligned}$$

2. Найти неопределённые интегралы:

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{-11 dx}{x-\sqrt{11}}, & \quad 2) \int \frac{3 dx}{x+\pi}, & 3) \int \frac{13 dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^7}, & \quad 4) \int \frac{8 dx}{(2x-9)^9}, & \quad 5) \int \frac{x}{x-1} dx, \\ 6) \int \frac{2x-1}{x+1} dx, & \quad 7) \int \frac{x^2+2x-1}{x-2} dx, & \quad 8) \int \frac{x^2+x+1}{2x+1} dx, & \quad 9) \int \frac{x-4}{(x-2) \cdot (x-3)} dx, \\ 10) \int \frac{2x^2-11}{x^2+x-6} dx, & \quad 11) \int \frac{-3x^2+x+19}{(x-4) \cdot (x-2) \cdot (x+1)} dx, & \quad 12) \int \frac{2x+3}{(x+2)^2 \cdot (x-3)} dx, \\ 13) \int \frac{1}{x^2+x+2} dx, & \quad 14) \int \frac{2x-1}{x^2+2x+1} dx, & \quad 15) \int \frac{5x+2}{x^2+2x+10} dx. \end{aligned}$$

3. Выучить простейшие дроби, алгоритм представления рациональной функции в виде суммы простейших дробей, метод интегрирования простейших дробей I, II, III типа (подготовка к домашней контрольной работе).

### Практическое занятие 6. Интегрирование тригонометрических и некоторых иррациональных функций

I. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{dx}{\sin x}, & \quad 2. \int \frac{dx}{5 \cos x + 3}, & 3. \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}, & \quad 4. \int \sin^3 x \cdot \sqrt{\cos x} dx, \\ 5. \int \sin^3 x dx, & \quad 6. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx, & 7. \int \cos^4 x dx, & \quad 8. \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx, \\ 9. \int \cos 5x \cdot \cos 3x dx, & \quad 10. \int \sin \frac{x}{12} \cdot \cos \frac{x}{3} dx, & \quad 11. \int \sin x \cdot \sin 3x dx. \end{aligned}$$

Работа в парах: нахождение неопределённых интегралов.

II. Найдите интегралы от некоторых иррациональных функций:

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}, & \quad 2. \int \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx, & 3. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}, & \quad 4. \int \sqrt{4-x^2} dx \\ 5. \int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx, & \quad 6. \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}, & 7. \int \frac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}} dx, & \quad 8. \int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}} dx. \end{aligned}$$

Работа в парах: нахождение неопределённых интегралов.

### Домашнее задание по теме «Интегрирование тригонометрических и некоторых иррациональных функций»

I. Найдите интегралы от тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} 1. \int \frac{dx}{\cos x}, & \quad 2. \int \frac{dx}{1-\sin x}, & 3. \int \frac{dx}{5 \sin^2 x - 3 \cos^2 x + 4}, & \quad 4. \int \sin^4 x \cdot \cos^5 x dx, \\ 5. \int \cos^3 x dx, & \quad 6. \int \frac{\sin 2x}{\cos^7 x} dx, & 7. \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx, & \quad 8. \int \cos 8x \cdot \cos 2x dx, \\ 9. \int \sin x \cdot \cos 3x dx, & \quad 10. \int \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{7} dx. \end{aligned}$$

II. Найдите интегралы от некоторых иррациональных функций:

1.  $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx,$
2.  $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx,$
3.  $\int \frac{dx}{(1+\sqrt[4]{x}) \cdot \sqrt{x}},$
4.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x-1}},$
6.  $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}},$
7.  $\int \frac{dx}{(2+x) \cdot \sqrt{x+1}}.$

III. Выучить методы интегрирования тригонометрических и иррациональных функций (подготовка к домашней контрольной работе).

### Практическое занятие 7. Определённый интеграл

1. Укажите функции, неинтегрируемые по Риману и интегрируемые по Риману на данном промежутке.

- 1)  $f(x)=e^x, \Delta=\left[-101; -\frac{1}{e}\right],$  2)  $f(x)=\sqrt{x-3}, \Delta=[2; 12],$
- 3)  $f(x)=\ln x, \Delta_1=\left[\frac{1}{e}; e\right], \Delta=\left[-\frac{1}{e}; e\right],$
- 4)  $f(x)=|\cos x|, \Delta=\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right],$  5)  $D(x)=\begin{cases} 0, & x \in \mathbf{I}, \\ 1, & x \in \mathbf{Q}, \end{cases}, \Delta=[-7; 0].$

2. Вычислите определённый интеграл:

- 1)  $\int_1^5 2x dx,$
- 2)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$
- 3)  $\int_e^{e^3} \frac{dx}{x},$
- 4)  $\int_9^{25} \sqrt{x} dx,$
- 5)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$
- 6)  $\int_{-1}^0 5^x dx,$
- 7)  $\int_1^3 \frac{dx}{x^3+x},$
- 8)  $\int_1^2 \frac{x+2}{3-x} dx,$
- 9)  $\int_0^1 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} dx.$

3. Используя замену переменной, вычислите определённый интеграл:

- 1)  $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3},$
- 2)  $\int_2^5 \frac{x}{1-x^2} dx,$
- 3)  $\int_1^5 \frac{x}{1+x^2} dx,$
- 4)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{4x-2} dx,$
- 5)  $\int_0^2 x \cdot \sqrt{3-\frac{x^2}{4}} dx,$
- 6)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right) dx,$
- 7)  $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx,$
- 8)  $\int_1^{e^2} \frac{\ln^3 x}{3x} dx,$
- 9)  $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx.$

4. Интегрируя по частям, вычислите определённый интеграл:

- 1)  $\int_0^{\pi} x \sin x dx,$
- 2)  $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx,$
- 3)  $\int_{-1}^0 x e^x dx,$
- 4)  $\int_0^1 x^2 3^x dx,$
- 5)  $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$

Выступление студентов с решёнными задачами.

### Домашнее задание по теме: «Определённый интеграл»

1. Укажите функции, неинтегрируемые по Риману и интегрируемые по Риману на данном промежутке:

- 1)  $f(x)=x^2, \Delta=[-5; 11],$
- 2)  $f(x)=\frac{1}{x}, \Delta_1=[-1; 1], \Delta_2=[0,3; 1],$
- 3)  $f(x)=\sqrt[3]{x+1}, \Delta=[0; 7].$

2. Вычислите определённый интеграл:

- 1)  $\int_0^{\pi} (2x + \sin 2x) dx,$
- 2)  $\int_0^{\lg 2} 2^x \cdot 5^x dx,$
- 3)  $\int_1^e \frac{x+\sqrt{x}}{x \cdot \sqrt{x}} dx,$
- 4)  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x \cdot \cos 8x dx,$

$$5) \int_1^3 \frac{dx}{x^2 + x}, \quad 6) \int_3^5 \frac{x^2 + 5}{x - 2} dx, \quad 7) \int_1^3 \frac{dx}{x^2 + 1}, \quad 8) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x dx.$$

3. Используя замену переменной, вычислите определённый интеграл:

$$1) \int_1^5 \frac{x dx}{x^2 + 1}, \quad 2) \int_0^{\pi} \left( \cos^3 x - \frac{3}{4} \cos x \right) dx, \quad 3) \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx, \quad 4) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x \cdot \ln(\cos x) dx,$$

$$5) \int_{\frac{1}{2}}^1 x \cdot \sqrt{2x - 1} dx, \quad 6) \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx, \quad 7) \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} dx.$$

4. Интегрируя по частям, вычислите определённый интеграл:

$$1) \int_{-1}^0 x e^{-x} dx, \quad 2) \int_0^2 \ln(x^2 + 4) dx, \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^3 \sin x dx, \quad 4) \int_0^1 4x \cdot \arcsin x dx, \quad 5) \int_0^{\frac{1}{2}} \arccos x dx.$$

5. Выучить методы вычисления определённого интеграла.

6. Выполнить домашнюю контрольную работу «Интегрирование функций одной переменной» (сдать на 10 занятии).

### Практическое занятие 8. Несобственные интегралы

1. Исследуйте сходимость несобственных интегралов:

$$a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad б) \int_0^1 \frac{dx}{x^7}, \quad в) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^7}, \quad г) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}, \quad д) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}, \quad е) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx.$$

2. Используя определение и свойства, исследовать сходимость несобственных интегралов:

$$a) \int_0^{+\infty} x \cdot \sin x dx, \quad б) \int_0^{+\infty} e^{-kx} dx, \quad г) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}, \quad д) \int_2^5 \frac{dx}{(5 - x)^3}, \quad е) \int_3^9 \frac{dx}{x - 3}.$$

Работа в парах: нахождение несобственных интегралов.

**Домашнее задание по теме: «Несобственные интегралы»**

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов с бесконечными пределами:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}, \quad 2) \int_0^{+\infty} e^{-4x} dx, \quad 3) \int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x^2} dx, \quad 4) \int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}, \quad 5) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}, \quad 6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

2. Исследовать сходимость несобственных интегралов от неограниченных функций:

$$1) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}, \quad 2) \int_0^1 \ln x dx, \quad 3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x - \cos 2x}, \quad 4) \int_0^1 x \cdot \ln x dx, \quad 5) \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x \ln x},$$

$$6) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}, \quad 7) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}}, \quad 8) \int_2^5 \frac{dx}{(x - 4)^2}, \quad 9) \int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3 - x)^2}}.$$

3. Выучить определения несобственных интегралов.

4. Выполнить домашнюю контрольную работу «Интегрирование функций одной переменной» (сдать на 10 занятии).

### Практическое занятие 9. Применение интегрального исчисления

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$1) y = \sin x, \quad x = -\frac{7}{6}\pi, \quad x = \frac{\pi}{4}, \quad y = 0; \quad 2) y = x^2, \quad y = 2x, \quad y = x.$$

2. Найдите длину кривой, заданной уравнением  $y = -x^2 + 2x$  от вершины до точки с абсциссой  $x = 2$ .
  3. Найдите объём тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, ограниченной кривыми:  $y = \frac{2}{1+x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ , относительно оси  $Ox$ .
  4. Найдите объём тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, ограниченной кривыми:  $y = x^3$ ,  $x = 0$ ,  $y = 8$ , относительно оси  $Ox$ .
- Выступление студентов с решёнными задачами.

### Раздел III. Элементы комбинаторики

#### Практическое занятие 10. Основные правила и формулы комбинаторики

Решить задачи:

1. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 5, 7, если: а) цифры не повторяются, б) цифры могут повторяться?
  2. Сколько чисел, содержащих не менее трех попарно различных цифр, можно составить из цифр 2, 4, 6, 8, 9?
  3. Скольким способами могут быть распределены три призовых места среди 16 соревнующихся?
  4. В студенческой группе 12 девушек и 16 юношей. Сколькими способами можно выбрать двух студентов одного пола?
  5. Если подбросить одновременно три игральные кости, то, сколько имеется различных возможных комбинаций выброшенных очков?
  6. Составьте различные размещения по два элемента из элементов множества  $A = \{3, 4, 5\}$  и подсчитайте их число.
  7. Из группы в 15 человек выбирают 4-х участников эстафеты  $800 \times 400 \times 200 \times 100$ . Сколькими способами можно расставить спортсменов на этих этапах?
  8. Составьте различные перестановки из элемента множества  $A = \{5, 8, 9\}$ .
  9. В комнате имеется 7 стульев. Сколькими способами можно разместить на них 7 гостей? 3 гостя?
  10. Студенты сдают 5 экзаменов, в том числе 2 экзамена по математике. Сколькими способами можно распределить экзамены так, чтобы экзамены по математике следовали один за другим? Не следовали один за другим?
  11. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове а) СОЛНЦЕ, б) ЛИЛИ?
  12. Составьте различные сочетания по два элемента из элементов множества  $A = \{3, 4, 5\}$  и подсчитайте их число.
  13. Сколькими способами можно разбить 8 предметов на две равные (по количеству предметов) группы?
  14. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «пятерку» попадут: а) одни девушки; 1 юноша и 4 девушки?
  15. Пять авторов должны написать задачник по математике, состоящий из 14 глав. Два автора напишут по 2 главы, два других – по 3 и ещё один – 4 главы книги. Сколькими способами может быть распределен материал между авторами?
  16. Из элементов (цифр) 2, 4, 5 составить все размещения и сочетания с повторениями по два элемента.
  17. Скольким способами можно распределить 6 разных книг между 3 школьниками?
  18. В почтовом отделении продаются открытки 6 видов. Сколькими способами можно приобрести в нем 4 открытки? 4 разных открытки?
- Решение задач по группам.

### Домашнее задание по теме «Основные правила и формулы комбинаторики»

1. В цветочном киоске 7 видов цветов. Сколькими разными способами можно составить букет, содержащий 3 цветка?
2. Из пункта А в пункт В можно добраться поездом или автобусом, а из него в пункт С – пешком, на автомобиле или на лодке. Сколькими способами можно выбрать дорогу из пункта А до пункта С через В?
3. Сколькими способами можно выбрать один цветок из корзины, в которой имеется 12 гвоздик, 15 роз и 7 хризантем?
4. Сколькими способами 3 награды (за I, II и III места) могут быть распределены между 10 участниками соревнований?
5. Сколько имеется пятизначных чисел, все цифры у которых различны?
6. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг (три горизонтальных полосы), если имеется материал 5 различных цветов?
7. Сколькими способами можно расставить на книжной полке десятитомник произведений Д. Лондона, располагая их: а) в произвольном порядке; б) так, чтобы I, V и IX тома стояли рядом (в любом порядке); в) так, чтобы I, II, III тома не стояли рядом (в любом порядке).
8. Сколько различных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове а) ТЕАТР, б) SOS, в) MISSISSIPPI?
9. Сколькими способами можно упорядочить множество  $A = \{8, 9, 10, 11, \dots, 15\}$  так, чтобы каждое четное число имело четный номер?
10. В вазе стоят 10 красных и 7 розовых гвоздик. Сколькими способами можно выбрать из неё: а) 3 гвоздики; б) 6 гвоздик; в) 4 красных и 3 розовых гвоздики?
11. Группа шахматистов сыграла между собой 28 партий. Каждые два из них встречались между собой один раз. Сколько шахматистов участвовало в соревновании?
12. Группа туристов из 12 юношей и 7 девушек выбирает по жребию 5 человек для приготовления ужина. Сколько существует способов, при которых в эту «пятерку» попадут: а) 3 юноши и 2 девушки; б) 5 юношей?
13. Сколькими способами можно разбить 9 предметов на две группы (выбор одной группы однозначно определяет вторую)?
14. В ящике 15 деталей, среди которых 6 бракованных. Наудачу выбирается комплект из 5 деталей. Сколько всего комплектов, в каждом из которых 2 детали бракованные?
15. В магазине имеется 7 видов тортов. Сколькими способами можно составить набор, содержащий 3 торта? А если имеется 3 вида тортов, а нужен набор из 7 тортов?
16. Пять человек вошли в лифт на 1-м этаже девятиэтажного дома. Сколькими способами пассажиры могут выйти из лифта на нужных этажах?
17. Сколькими способами можно разместить в двух комплектах 9 различных предметов?
18. Сколько различных букетов по 5 цветков в каждом можно составить, если в наличие есть достаточно много цветков 4-х видов?
19. Выучить основные правила и формулы комбинаторики.

## Раздел IV. Элементы теории вероятностей

### Практическое занятие 11. Определения вероятности события. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Работа в парах: решение задач.

#### I. Определения вероятности события

1. Событие  $A$  – «появление 6 очков при бросании игральной кости», событие  $B$  – «появление от 2 до 6 очков при бросании игральной кости». В чем состоит событие  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ?
2. Турист из пункта А в пункт В может попасть двумя дорогами. Обозначим события:  $A_1$  – «турист пошел первой дорогой»,  $A_2$  – «турист пошел второй дорогой». Из пункта В в пункт С ведут три дороги. Обозначим события:  $B_1$  – «турист пошел первой дорогой»,  $B_2$  –



«турист пошел второй дорогой»,  $B_3$  – «турист пошел третьей дорогой». Применяя понятия объединения и пересечения, а так же противоположного события, постройте события, состоящие в том, что: 1) от А до В он выбрал дорогу наугад, а от В до С он пошел третьей дорогой; 2) от А до В он пошел первой дорогой, а от В до С – дорогой, выбранной наугад; 3) от А до В он пошел не первой дорогой, а от В до С – не третьей; 4) он дошел от А до С.

3. Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  – случайные события, выраженные элементарными событиями одного и того же пространства элементарных событий. Запишите такие события: а) произошло только  $A$ , б) произошло одно и только одно из данных событий, в) произошло два и только два из данных событий, г) произошли все три события, д) произошло хотя бы одно из данных событий, е) произошло не более двух событий.

4. Событие  $A$  означает, что хотя бы одна из имеющихся 15 электрических лампочек нестандартная. Что означает событие  $\bar{A}$ ?

5. Какие из следующих событий несовместны, а какие совместны: 1)  $A$  – выпало четное число очков,  $B$  – выпало нечетное число очков; 2)  $A$  – выпало нечетное число очков,  $B$  – выпало число очков, кратное трем; 3)  $A$  – выпало простое число очков,  $B$  – выпало четное число очков?

6. Игральная кость налита свинцом, в результате чего вероятность выпадения каждого числа очков обратно пропорциональна этому числу. Найдите вероятностное пространство для этого испытания.

7. Вероятность выигрыша партии в шахматы мастером А у перворазрядника В вдвое больше вероятности того, что партия кончится вничью, а вероятность ничейного исхода вдвое больше, чем проигрыша мастера. Найдите вероятностное пространство для этого испытания.

8. Маша и Миша хотят определить, кто будет мыть сегодня посуду, следующим образом: каждый из них бросает кубик; если сумма очков, выпавших на двух кубиках, будет нечетной, то посуду будет мыть Маша, если – четной, то Миша. Но Миша решил, что тогда его шансы мыть посуду больше. Он рассуждал таким образом: «Ты, Маша, будешь мыть посуду, если общее число очков, выпавших на двух кубиках, будет нечетным. Таких случаев пять: 3, 5, 7, 9, 11. Я буду мыть посуду, если это число будет четное. Таких случаев шесть: 2, 4, 6, 8, 10, 12, то есть больше». Прав ли Миша?

9. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Неграмотный мальчик перемешал буквы, а потом наугад их собрал. Какова вероятность того, что он опять составил слово «книга»?

10. Из пяти отрезков длиной 1, 3, 5, 7 и 9 наудачу выбирают три. Какова вероятность того, что из них можно построить треугольник?

11. На первом этаже семиэтажного дома в лифт зашли 3 человека. Вероятность выхода каждого из лифта на любом этаже одинакова. Найдите вероятности событий:  $A$  – все вышли из лифта на четвертом этаже,  $B$  – все вышли из лифта на одном и том же этаже,  $C$  – все выходили из лифта на разных этажах.

12. На книжной полке произвольным образом расставлены 4 книги по теории вероятностей и 3 книги по теории множеств. Какова вероятность того, что книги по одному и тому же предмету окажутся рядом?

13. В ящике лежат 13 зеленых, 10 красных и 7 синих одинаковых на ощупь шаров. Наудачу вынимают 8 шаров. Чему равна вероятность того, что вынули 3 зеленых, 2 красных и 3 синих шара.

14. Наудачу выбираются два числа  $x$  и  $y$  так, что сумма их квадратов меньше 20. Какова вероятность того, что число  $x$  окажется по абсолютной величине меньше двух, а число  $y$  окажется положительным, но меньше, чем квадрат числа  $x$ ?

15. На окружности радиуса  $R$  наудачу поставлены три точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Какова вероятность того, что треугольник  $ABC$  остроугольный?

16. На окружности радиуса  $R$  поставлена точка  $A$ . Какова вероятность того, что брошенная на окружность точка  $B$  окажется от точки  $A$  на расстоянии  $R$ ?

17. Проволоку длиной 20 см сгибают в наудачу выбранной точке. Затем проволоку сгибают так, чтобы получить прямоугольник. Какова вероятность того, что площадь полученного прямоугольника будет меньше 21 кв.см?

18. На шахматную доску 100 раз бросили монету радиусом 1 см. В 64 случаях монета целиком оказывалась внутри какой-нибудь клетки. Оцените размер одной клетки шахматной доски

## II. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. Вероятность выигрыша по билету одной лотереи равна 0,08, а по билету другой – 0,09. Какова вероятность того, что лицо, купившее по одному билету каждой лотереи, выиграет по обоим билетам?

2. Вероятность выполнения обязательств за первый квартал по реализации готовой продукции одним заводом – 0,9, другим – 0,95. Какова вероятность того, что хотя бы один из заводов выполнит свои обязательства, если они реализуют свою продукцию независимо друг от друга?

3. В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и одна задача. Всего составлено 28 билетов, содержащих разные вопросы и задачи. Студент подготовил только 50 теоретических вопросов и сможет решить задачи к 22-м билетам. Какова вероятность того что, вынув наудачу билет, студент ответит на все вопросы?

4. Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты производятся последовательно до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.

5. Пусть  $p(AB) = \frac{1}{4}$ ,  $p(\bar{A}) = \frac{1}{3}$ ,  $p(B) = \frac{1}{2}$ . Найдите  $p(A+B)$ .

6. Два охотника стреляют в волка, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого охотника вероятность попадания в цель 0,7, для второго – 0,8. Какова вероятность попадания в волка?

7. В коробке имеется 2 красных, 3 синих и 2 зеленых карандаша. Из нее наудачу без возвращения вынимают один за другим по одному карандашу. Найти вероятность того, что красный карандаш появится раньше синего?

## **Домашнее задание по теме «Определения вероятности события. Теоремы сложения и умножения вероятностей.»**

### I. Определения вероятности события

1. Произвольно выбираем два числа. Событие  $A$  – «выбранные числа кратны двум», событие  $B$  – «выбранные числа кратны трем». В чем состоят события  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ?

2. Рассмотрим события:  $A$  – «появление нечетного числа очков при бросании кубика»,  $B$  – «не появление трех очков при бросании кубика»,  $C$  – «не появление пяти очков при бросании кубика»,  $D$  – «появление четырех очков». В чем состоят события:  $A \cap B \cap C$ ,  $A \cap D$ ,  $\bar{D}$ ,  $\bar{C} \cap \bar{B}$ ,  $\bar{C} \cup \bar{B}$ ?

3. Наугад отобранная деталь может оказаться или первого сорта (событие  $A$ ), или второго (событие  $B$ ), или третьего (событие  $C$ ). В чем состоят события:  $A \cup B$ ,  $\bar{A} \cup \bar{C}$ ,  $A \cap C$ ?

4. Какие из следующих пар событий противоположны: 1) экзамен студентом сдан на «отлично»; сдан на «неудовлетворительно», 2) появление шести очков при бросании игрального кубика; появление одного очка, 3) при двукратном бросании монеты дважды появился герб; хотя бы один раз появилась решка?

5. Монета искривлена, поэтому вероятность выпадения цифры втрое больше вероятности выпадения герба. Чему равны эти вероятности?

6. Слово «агава» разрезали на буквы и их выложили наудачу в ряд. Какова вероятность опять получить это же слово?

7. Игральная кость бросается дважды. Найдите вероятности событий:  $A$  – в обоих бросаниях выпадет одинаковое число очков;  $B$  – сумма очков равна 5;  $C$  – сумма очков равна 7;  $D$  – сумма очков равна 12;  $E$  – число выпавших очков делится на 13;  $F$  – в каждом броса-

нии выпадет нечетное число очков;  $G$  – в каждом бросании выпадет четное число очков;  $H$  – сумма выпавших очков будет четным числом;  $J$  – шестерка не выпадет ни разу;  $K$  – шестерка выпадет хотя бы один раз;  $L$  – сумма очков будет делиться на 3;  $M$  – сумма очков будет делиться на 6.

8. На 5 карточках написано по одной цифре из набора 1, 2, 3, 4, 5. Наугад выбираются одна за другой две карточки. Какова вероятность того, что число на второй карточке больше, чем на первой?

9. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяется 5 человек. Вечер проводит комиссия, в составе которой 21 юноша и 2 девушки. Найти вероятность того, что в число дежурных войдут обе девушки.

10. Из колоды (36 листов) извлекаются 2 карты. Определить вероятность того, что это будут: а) карты разной масти; б) одинаковые карты разной масти; в) 2 туза.

11. Четирем игрокам раздается поровну колода из 36 карт. Определите вероятность того, что каждый игрок получит карты только одной масти.

12. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Наугад берут 4 карточки и выкладывают их в ряд. Какова вероятность того, что: 1) получится четное число, 2) получится число 1234?

13. Девять студентов университета случайным образом расселяются в общежитии по три человека в трех комнатах. Какова вероятность того, что два поссорившихся студента не будут жить в одной комнате?

## II. Теоремы сложения и умножения вероятностей

1. Вероятность улучшения спортсменом личного достижения по прыжку с шестом равна 0,2. Чему равна вероятность того, что он улучшит свой результат, если ему предоставлена возможность прыгать два раза?

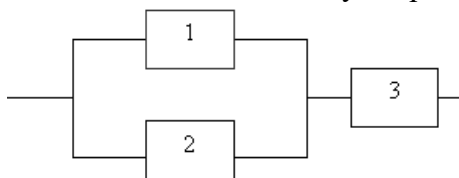
2. По шоссе в сторону бензоколонки движутся три машины. Вероятность того, что к бензоколонке подъедет для заправки первая машина, равна 0,7, вторая – 0,3 и третья – 0,5. Найдите вероятности того, что к бензоколонке для заправки а) подъедет только вторая машина, б) подъедет одна машина, в) подъедут все три машины, г) подъедут не более двух машин, д) подъедет хотя бы одна машина.

3. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность бесперебойной работы в течение часа для первого станка равна 0,75, а для второго – 0,8. Какова вероятность того, что в течение часа будет: а) нарушение в работе только одного станка; б) нарушение в работе двух станков; в) нарушение в работе хотя бы одного станка?

4. 10 участников собрания носят галоши одинакового размера. Уходя с собрания домой, они вынуждены одевать галоши в темном коридоре, поэтому не могут отличить своих галош от чужих. Чему равна вероятность того, что каждый из участников собрания вернется домой в своих галошах?

5. Пусть  $p(A) = \frac{1}{2}$ ,  $p(B) = \frac{2}{3}$ . Совместны ли события  $A$  и  $B$ ?

6. Вероятности безотказной работы для элементов 1, 2 и 3 на рисунке соответственно равны 0,3; 0,5 и 0,8. Какова вероятность того, что цепь будет работать?



## Практическое занятие 12. Полная формула вероятности, формула Байеса

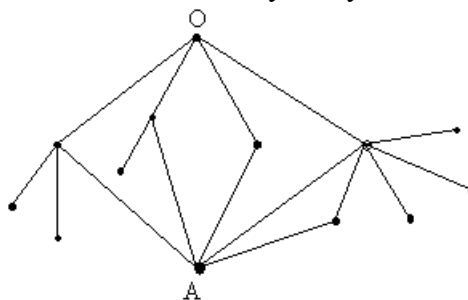
Работа в парах: решение задач.

1. Имеются два одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 2 белых и 1 черный шар, во втором – 1 белый и 4 черных шара. Наудачу выбирают один ящик и вынимают из него шар. Какова вероятность, что вынутый шар окажется белым?

2. На карточках написаны буквы, образующие слово «комбинаторика», но две карточки из этого набора утеряны. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что на ней окажется гласная буква?
3. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взяли один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.
4. Турист, заблудившись в лесу, вышел на полянку, от которой в разные стороны ведут 5 дорог. Если турист пойдет по первой дороге, то вероятность выхода его из леса в течение часа составляет около 0,6; если по второй – 0,3; если по третьей – 0,2; если по четвертой – 0,1; если по пятой – 0,1. Какова вероятность того, что турист пошел по первой дороге, если через час он вышел из леса?
5. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. В их продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. 1) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный? 2) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой, второй, третьей машиной?
6. Имеется три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй, третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10. Из наудачу взятой партии наудачу извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. После возвращения детали в партию из этой же партии вторично наудачу извлекли деталь, которая также оказалась стандартной. Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.
7. Решите предыдущую задачу, если первая извлеченная из партии деталь назад не возвращалась.

**Домашнее задание по теме «Полная формула вероятности, формула Байеса»**

1. В цехе работают 20 станков. Из них 10 – марки А, 6 – марки В, 4 – марки С. Вероятность того, что качество детали окажется отличным, для этих станков соответственно равна: 0,9; 0,8 и 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?
2. Имеются две урны: в первой 3 белых шара и 2 черных; во второй 4 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, два шара. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.
3. На рисунке изображена схема дорог. Туристы вышли из пункта О, выбирая дорогу наугад. Какова вероятность того, что они попадут в пункт А?



4. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.
5. Предположим, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.)
6. Три стрелка произвели залп, причем две пули поразили мишень. Найти вероятность того, что третий стрелок поразил мишень, если вероятности попадания в мишень первым, вторым и третьим стрелками соответственно равны 0,6; 0,5 и 0,4. (Гипотезы:  $H_1$  – третий стрелок поразил мишень,  $H_2$  – третий стрелок не попал в мишень.)

### Практические занятия 13. Повторение испытаний

При решении задач по этой теме применяется теория, изложенная на лекции «Основные понятия теории вероятностей. Теоремы сложения и умножения вероятностей и их следствия. Повторение испытаний», систематизация необходимых формул приведена в схемах 1 и 2, желательно использовать эти схемы при выборе формулы и решении задач.

Схема 1

$$P_n(k) = \begin{cases} \rightarrow C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{если } n \text{ мало.} \\ \rightarrow \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), & x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}, \text{ если } n \text{ велико} \\ \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, & \lambda = np, \text{ если } n \text{ велико} \\ & \text{а } p \text{ мала } (p < 0,1, npq < 9) \end{cases}$$

Схема 2

$$P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \begin{cases} \rightarrow \sum_{k_1}^{k_2} C_n^{k_i} p^{k_i} q^{n-k_i}, & \text{если } n \text{ мало.} \\ \rightarrow \sum_{k_1}^{k_2} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), & x = \frac{k_i-np}{\sqrt{npq}}, \text{ если } n \text{ велико,} \\ & \text{а число слагаемых мало.} \\ \rightarrow \sum_{k_1}^{k_2} \frac{\lambda^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda}, & \text{если } n \text{ велико, } p \text{ — мала,} \\ & \text{число слагаемых мало.} \\ \rightarrow \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right), & \text{если } n \text{ велико,} \\ & \text{число слагаемых велико.} \end{cases}$$

1. В некотором приборе 10 ламп. Для любой лампы вероятность того, что она останется исправной в течение года, равна  $a$ . Какова вероятность того, что: 1) в течение года останется исправной одна лампа; 2) в течение года выйдет из строя одна лампа; 3) в течение года хотя бы одна лампа выйдет из строя; 4) в течение года выйдут из строя от 2 до 4 ламп?
2. Изделия некоторого производства содержат 5% брака. Найти вероятность того, что среди пяти наугад взятых изделий: а) нет ни одного испорченного, б) будут два испорченных.
3. Наблюдениями установлено, что в некоторой местности в сентябре в среднем бывает 12 дождливых дней. Какова вероятность того, что из случайно взятых в этом месяце 8 дней 3 дня окажутся дождливыми?
4. Для прядения смешаны поровну белый и окрашенный хлопок. Какова вероятность среди пяти случайно выбранных волокон смеси обнаружить менее двух окрашенных?
5. Найдите вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7?
6. Вы играете в шахматы с равным по силе партнером. Чего следует больше ожидать: трех побед в четырех партиях или шести побед в восьми партиях?

7. Батарея дала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Найти наимвероятнейшее число попаданий и вероятность этого числа попаданий.
8. При проведении некоторого испытания вероятность появления ожидаемого результата 0,01. Сколько раз нужно провести испытание, чтобы с вероятностью 0,5 можно было бы ожидать хотя бы одного появления этого результата?
9. Вероятность получения удачного результата при производстве сложного химического опыта равна  $\frac{2}{3}$ . Найти наимвероятнейшее число удачных опытов, если общее их количество равно 7.
10. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле из орудия равна 0,8. Сколько нужно произвести выстрелов, чтобы вероятнейшее число попаданий было равно 20?
11. Какова вероятность получения на экзамене не менее 70% правильных ответов при простом отгадывании на экзамене, состоящем в определении истинности или ложности 10 утверждений?
12. Контрольная работа состоит из четырех вопросов. На каждый вопрос приведено 5 ответов, один из которых правильный. Какова вероятность того, что при простом угадывании правильный ответ будет дан на три вопроса?
13. Пряжильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение одной минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение одной минуты обрыв произойдет на 5 веретенах.
14. Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,01. Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?
15. Имеется общество из 500 человек. Найти вероятность того, что у двух человек день рождения придется на Новый год.
16. Вероятность появления успеха в каждом испытании равна 0,25. Какова вероятность того, что при 300 испытаниях успех наступит: а) ровно 75 раз, б) ровно 85 раз?
17. Вероятность того, что на странице книги могут оказаться опечатки, равна 0,0025. Проверяется книга, содержащая 800 страниц. Найдите вероятность того, что с опечатками окажется: а) 5 страниц, б) от трех до пяти страниц?
18. В первые классы должно быть принято 200 детей. Определить вероятность того, что среди них окажется 100 девочек, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.
19. Вероятность выигрыша на один билет денежной лотереи равна 0,02. Какова вероятность того, что из 100 билетов выигрыш выпадет: а) на 2 билета, б) хотя бы на один билет, в) на 2 или 3 билета?
20. Какова вероятность того, что в столбике из 100 наугад отобранных монет число монет, расположенных «гербом» вверх, будет от 45 до 55?
21. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбраковано будет не больше 17?
22. Вероятность появления успеха в каждом из 625 независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что частота появления успеха отклонится по абсолютной величине от его вероятности не более чем на 0,04.
23. Сколько нужно произвести опытов с бросанием монеты, чтобы с вероятностью 0,92 можно было бы ожидать отклонение частоты появления «герба» от теоретической вероятности 0,5 на абсолютную величину, меньшую, чем 0,01?
24. Вероятность появления успеха в каждом из 400 независимых испытаний равна 0,8. Найти такое положительное число  $\varepsilon$ , что с вероятностью 0,9876 абсолютная величина отклонения частоты появления успеха от его вероятности 0,8 не превысит  $\varepsilon$ .
25. Вероятность того, что смерть человека произойдет на 21-ом году жизни равна 0,006. Застраховано 1000 двадцатилетних. Годовой взнос составляет 15 рублей с каждого. В случае смерти застрахованного его родственникам выплачивается 1200 рублей. Какова вероятность того, что в конце года выплата по страховкам превысит сумму страховых взносов?

26. В поселке А 2500 жителей. Каждый из них примерно 6 раз в месяц ездит на поезде в город В, выбирая дни поездок по случайным мотивам независимо от остальных. Какую наименьшую вместительность должен иметь поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней? (Поезд идет один раз в сутки).

#### Практические занятия 14. Дискретные случайные величины. Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Работа в парах: решение задач.

1. Дискретная случайная величина  $X$  задана таблицей распределения:

$X$	0	2	4
$p$	0,3	0,5	0,2

Построить многоугольник распределения случайной величины. Найти числовые характеристики случайной величины. Найти функцию распределения случайной величины и построить ее график.

2. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины, заданной законом распределения

$X$	3	5	7	9
$p$	0,4	0,3	0,2	?

3. Дан ряд распределения случайной величины  $X$ :

$X$	-2	-1	0	1	2
$p$	0,1	0,2	0,2	?	0,1

Требуется: 1) построить многоугольник распределения; 2) построить функцию распределения и начертить ее график; 3) найти вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее 1; 4) найти вероятность того, что случайная величина примет значение, не превосходящее по абсолютной величине 1.

4. Монета подбрасывается 4 раза. Для случайного числа выпадений герба составьте таблицу распределения вероятностей. Найдите числовые характеристики и функцию распределения.

5. Контрольная работа состоит из трех вопросов. На каждый вопрос дано по 5 ответов, среди которых имеется один правильный. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа правильных ответов, полученных при простом угадывании. Каково среднее число правильных ответов?

6. У охотника 4 патрона. Он стреляет по зайцу, пока не попадет или пока не кончатся патроны. Составьте закон распределения вероятностей случайной величины, означающей число выстрелов, если вероятность попадания при одном выстреле 0,2. Сколько раз в среднем придется стрелять охотнику?

7. В коробке имеется 7 карандашей, из которых 4 карандаша красные. Наудачу извлекаются 3 карандаша. Составить ряд распределения случайной величины, означающей число извлеченных красных карандашей. Построить многоугольник распределения. Найти функцию распределения и построить ее график.

8. Проверяемая книга насчитывает 800 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,0025. Найдите  $M(X)$ ,  $D(X)$ , если  $X$  означает число страниц с опечатками.

9. Найти  $M(X)$  числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 40 билетов, причем вероятность выигрыша равна 0,05.

10. Производится 20 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления успеха равна 0,2. Найти дисперсию числа появления успеха в этих испытаниях.

11. Вероятность обрыва нити в течение времени  $t$  на каждом веретене одинакова и равна 0,005. Среднее число обрывов нитей за время  $t$  равно 5. Сколько веретен обслуживает прядильница?

12. У дежурного гостиницы в кармане 8 различных ключей от разных комнат. Вынув наугад ключ, он пробует открыть дверь одной из комнат. Сколько раз в среднем ему придется пробовать открывать эту комнату, если: 1) проверенный ключ не кладется обратно в карман; 2) проверенный ключ кладется обратно в карман?

13. Дискретная случайная величина  $X$  имеет ряд распределения

$X$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$p$	0,2	0,7	0,1

Построить ряд распределения случайной величины  $Y = \sin X$ , найти  $M(Y)$ ,  $D(Y)$ .

14. Дискретная случайная величина  $X$  имеет ряд распределения

$X$	-2	-1	0	1	2
$p$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить ряды распределения случайных величин  $Y = X^2 + 1$ ,  $Z = |X|$ ,  $N = X^3$ . Найти  $M(X + Y)$ ,  $M(X \cdot Y)$ .

### Практические занятия 15. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и плотность распределения вероятностей. Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Работа в парах: решение задач.

1. Случайная величина  $X$  задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2, \\ (x-2)^2, & \text{если } 2 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) плотность вероятности  $f(x)$ ; б) вероятность попадания величины  $X$  в интервал  $(1; 2,5)$ ; в) найти  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma$ .

2. Дана интегральная функция случайной величины  $X$ :  $F(x) = \begin{cases} 4^x & \text{при } x \leq 0 \\ 0 & \text{при } x > 0 \end{cases}$ .

а) Найти плотность вероятности  $f(x)$ ; б) вычислить вероятность того, что в результате испытания случайная величина попадет в интервал  $(-0,5; 0)$  двумя способами: с помощью  $f(x)$  и с помощью  $F(x)$ .

3. (Распределение Коши) Функция распределения случайной величины  $X$  задана формулой  $F(x) = A + B \arctg x$ ,  $x \in (-\infty; +\infty)$ . Найти: а) постоянные  $A$  и  $B$ ; б) плотность вероятности  $f(x)$ ; в) вероятность того, что  $X$  попадет в отрезок  $[-1; 1]$ .

4. Случайная величина  $X$  имеет плотность распределения вероятностей  $f(x) = \frac{A}{1+x^2}$ .

Найти: а) коэффициент  $A$  и функцию распределения, б) вероятность осуществления неравенства  $-1 < X < 1$ . в) Существует ли математическое ожидание величины  $X$ ?

5. Плотность вероятности непрерывной случайной величины  $X$  равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & \text{если } 1 < x \leq 2. \\ 0, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

а) Построить функцию распределения  $F(x)$  и начертить ее график; б) найти числовые характеристики случайной величины.



6. Случайная величина  $X$  имеет плотность распределения  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ A \sin x, & \text{если } 0 < x \leq \pi \\ 0, & \text{если } x > \pi \end{cases}$ .

Найти: а) параметр  $A$ ; б) функцию распределения  $F(x)$ ; в) вероятность того, что в результате испытания случайная величина  $X$  примет значение из интервала  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

7. Случайная величина  $X$  распределена равномерно.  $M(X)=4$ ,  $D(X)=3$ . Найдите плотность распределения случайной величины  $X$ .

8. Плотность вероятности непрерывной случайной величины  $X$  выражается формулой:

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}. \text{ Найти } M(X).$$

### Практическое занятие 16. Нормальное распределение. Закон больших чисел

Работа в парах: решение задач.

#### 1. Нормальное распределение

1. Показать, что  $U = \frac{X - a}{\sigma}$  – нормированная случайная величина если  $X$  – нормально распределенная случайная величина и  $M(X) = a$ ,  $D(X) = \sigma^2$ .

2. Плотность вероятностей случайной величины  $X$ , подчиненной нормальному закону распределения, задана функцией  $f(x) = A e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$ . Найти коэффициент  $A$  и определить вероятность того, что в результате испытания случайная величина  $X$  примет значение в интервале  $(2; 5)$ .

3. Используя свойства кривой плотности вероятности случайной величины  $X$ , подчиненной нормальному закону распределения, найти ее математическое ожидание, если известно, что  $P(-\infty < X < -3) = P(7 < X < +\infty)$ . Сделайте чертеж.

4. Случайная величина  $X$  распределена нормально и имеет плотность вероятности  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$ . Найти математическое ожидание случайной величины  $Y = 4X - 2$ .

5. Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 15 лет и средним квадратическим отклонением, равным трем годам. Определить вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет.

6. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических (одного знака) погрешностей. Случайные погрешности взвешивания подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением  $\sigma = 20$  г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с погрешностью, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

7. Номинальное значение толщины  $X$  установочного кольца, вытачиваемого на токарном автомате, равно  $a = 10$  мм. Среднее квадратическое отклонение равно 0,15 мм. Предполагается, что случайная величина  $X$  распределена нормально. Найти вероятность того, что изготовленное кольцо будет иметь толщину, отличающуюся от номинала более, чем на 3% номинала.

8. Измерительный прибор имеет систематическую ошибку 5 м и среднюю квадратическую ошибку 75 м. Какова вероятность того, что ошибка измерения не превзойдет по абсолютной величине 5 м?

9. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически: их средняя масса равна 1,06 кг. Найти стандартное отклонение, если 5% коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

10. Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шарика  $d_0 = 5$  мм. Фактический диаметр – случайная величина с математическим ожиданием  $d_1 = 5$  мм и среднеквадратическим отклонением 0,05 мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинала более чем на 0,1 мм. Определить процент брака.

11. При измерении детали ее длина  $X$  является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами  $a = 22$  см и  $\sigma = 0,2$  см. Найдите интервал, в который с вероятностью 0,9544 попадает  $X$ .

12. Случайная величина  $X$  имеет плотность вероятностей  $f(x) = \frac{1}{0,5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{0,5}}$ . Найти ве-

роятность того, что при двух независимых испытаниях случайная величина  $X$  хотя бы один раз примет значение вне интервала (4; 6).

13. Бомбардировщик, пролетевший вдоль моста длиной 30 м и шириной 8 м, сбросил бомбы. Случайные величины  $X$  и  $Y$  (расстояние от вертикальной и горизонтальной осей симметрии моста до места падения бомбы) независимы и распределены нормально со средним квадратическим отклонениями, соответственно равными 6 м и 4 м, и математическими ожиданиями, равными 0. Найти: а) вероятность попадания в мост одной сброшенной бомбой; б) вероятность разрушения моста, если сброшены две бомбы, причем для разрушения моста достаточно одного попадания.

14. На отрезке  $\left[0, \frac{1}{4}\right]$  случайным образом выбраны 162 числа, которые рассматриваются

как значения 162 независимых и равномерно распределенных величин  $X_1, X_2, \dots, X_{162}$ .

Найти вероятность того, что их сумма заключена между 22 и 26.

## II. Закон больших чисел

1. Средний срок службы прибора 10 лет. Используя неравенство Маркова, оценить вероятность того, что данный прибор не прослужит более 15 лет.

2. Парикмахерская обслуживает в среднем 120 клиентов в день. Оценить вероятность того, что сегодня в данной парикмахерской будет обслужено а) не менее 150 клиентов, б) менее 160 клиентов.

3. Средняя температура в квартире, подключенной к ТЭЦ, в период отопительного сезона составляет  $20^0$ , а среднее квадратическое отклонение равно  $2^0$ . Найти вероятность того, что температура в квартире отклонится от средней по абсолютной величине не более чем на  $3^0$ .

4. Игральный кубик подбрасывается 350 раз. Оценить вероятность того, что среднее арифметическое числа выпавших очков отклонится от математического ожидания по абсолютной величине не более чем на 0,2.

5. Оценить вероятность того, что в результате подбрасывания игральной кости в течение 320 раз относительная частота появления на верхней грани 5 очков отклонится от вероятности этого события (по абсолютной величине) не более чем на 0,03.

6. Игральный кубик подбрасывается 180 раз. Используя неравенство Чебышева, оцените вероятность того, что 5 очков появится от 24 до 36 раз. Оцените вероятность этого же события с помощью интегральной теоремы Лапласа.

7. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равна 0,8. Проверяется 800 изделий. Случайная величина  $X$  – число изделий высшего качества. Укажите промежуток, в котором значения этой случайной величины можно ожидать с вероятностью, не меньшей 0,5.

8. Дисперсия каждой из независимых случайных величин  $X_k$ , означающей продолжительность горения электролампочки, не превышает 20 час. Сколько надо взять для испытания лампочек, чтобы вероятность того, что абсолютное отклонение средней продолжительности горения лампочки от средней арифметической их математических ожиданий не превышает одного часа, была не меньше 0,95.

9. Применима ли к последовательности независимых случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  теорема Чебышева, если каждая случайная величина  $X_n$  задана таблицей распределения:

а)

$X$	$-n\alpha$	0	$-n\alpha$
$p$	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$

б)

$X$	$-n\alpha$	0	$-n\alpha$
$p$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

10. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равна 0,6. Используя неравенство Чебышева и интегральную теорему Лапласа, оцените вероятность наличия от 340 до 380 изделий высшего качества в партии из 600 изделий. Сравните результаты.

11. Оценить с помощью неравенства Чебышева вероятность того, что среди 800 новорожденных детей мальчиков будет от 370 до 430 включительно. Считать вероятность рождения мальчика равной 0,5.

12. Общая стоимость букетов в цветочном киоске составляет 18000 руб. Вероятность того, что стоимость наугад взятого букета не превышает 300 рублей, равна 0,7. Что можно сказать о количестве букетов в киоске?

13. Известно, что случайная величина  $X$  имеет плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{-x}}{2}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала  $(0;6)$ .

14. Общая стоимость всех букетов в цветочном киоске составляет 18000 руб. Вероятность того, что стоимость взятого наугад букета не превышает 300 рублей, равна 0,7. Что можно сказать о количестве букетов в киоске?

**Домашнее задание:** выполнить домашнюю контрольную работу «Теория вероятностей».

## Раздел V. Элементы математической статистики

### Практическое занятие 17. Основные понятия математической статистики. Статистические методы обработки экспериментальных данных. Выборочный метод

Даны наблюдавшиеся значения некоторой случайной величины. Требуется:

1. Построить сгруппированный статистический ряд.
2. Построить кумуляту.
3. Построить гистограмму и полигон относительных частот.
4. Найти выборочные точечные характеристики: среднюю, дисперсию, коэффициент асимметрии, эксцесс, моду, медиану, коэффициент вариации.
5. Проверить гипотезу относительно близости эмпирического распределения к нормальному.

#### ВАРИАНТ 1

86	72	67	84	75	51	77	74	55	79	82	99	69	64
49	68	63	58	76	72	53	90	71	52	87	84	48	66
83	96	70	65	60	80	63	59	79	62	74	70	81	91
68	53	76	67	62	57	77	61	56	46	46	71	68	52

### Практическое занятие 18. Статистические оценки параметров распределения

Приводятся результаты измерения некоторой величины, которые будем рассматривать как  $n$  реализаций случайной величины  $X$ . В предположении, что  $X$  имеет нормальное распределение:

1. Найти точечные несмещенные оценки математического ожидания  $a$  и среднего квадратического отклонения  $\sigma$ .
2. Найти доверительный интервал, покрывающий математическое ожидание с заданной доверительной вероятностью:  $\gamma = 0,95$ ;  $\gamma = 0,99$ ;  $\gamma = 0,999$ .
3. Найти погрешность, с которой среднее арифметическое оценивает математическое ожидание  $a$  случайной величины  $X$ , если доверительная вероятность  $\gamma = 0,99$ ;  $\gamma = 0,999$ .
4. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестное среднее квадратическое отклонение с заданной доверительной вероятностью  $\gamma = 0,95$ .
5. Найти минимальный объем выборки, чтобы с доверительной вероятностью  $\gamma = 0,95$  можно было утверждать, что, принимая среднее арифметическое за математическое ожидание случайной величины  $X$ , допускаем погрешность  $\varepsilon = \frac{1}{3} \sigma$ .

#### ВАРИАНТ 1

31,85	31,36	30,32	30,90	31,70	32,40
31,60	31,12	30,98	31,02	31,05	31,00

### Практическое занятие 19. Корреляционный анализ

#### Задание 1

По заданной выборке:

- 1) найти уравнение прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$ ,
- 2) оценить тесноту линейной связи, вычислив выборочный коэффициент корреляции;
- 3) проверить гипотезу о значимости коэффициента корреляции при уровне значимости 0,1.

#### Задание 2

По корреляционной таблице:

- 1) в прямоугольной системе координат построить эмпирическую линию регрессии  $Y$  на  $X$ ;
- 2) оценить тесноту линейной корреляционной связи;
- 3) проверить гипотезу о значимости коэффициента корреляции при уровне значимости 0,02;
- 4) составить линейное уравнение регрессии  $Y$  на  $X$  и построить линию регрессии в той же системе координат, где построена эмпирическая линия регрессии;
- 5) используя полученное уравнение регрессии, оценить ожидаемое среднее значение признака  $Y$  при  $x=x_0$ .

#### ВАРИАНТ 1

1)

$X$	9,7	10,4	10,3	9,8	10,1	10,2	10,0	9,9	9,6	9,8
$Y$	3,5	3,1	3,2	3,4	3,0	3,3	3,1	3,4	3,5	3,2

2)  $x_0=58$

$Y \backslash X$	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	$n_y$
5-8	5	4				9
8-11		12	8	1		21
11-14			5	5		10
14-17			4	7		11
17-20				2	1	3

20-23					1	1
$n_x$	5	16	17	15	2	55

### Практическое занятие 20. Статистическая проверка статистических гипотез.

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости  $\alpha = 0,05$  проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с эмпирическим распределением выборки.

#### ВАРИАНТ 1

1)

$x_i$	8	11	14	17	20	23	26	29	32
$n_i$	6	14	17	22	25	20	18	10	8

2)

Границы интервалов	-10;-6	-6;-2	-2;-2	2;6	6;10	10;14
частота	6	13	19	12	6	4

## 6 ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ КОНТРОЛЯ (САМОКОНТРОЛЯ) УСВОЕННОГО МАТЕРИАЛА

### 6.1 Оценочные средства, показатели и критерии оценивания компетенций

Индекс компетенции	Оценочное средство	Показатели оценивания	Критерии оценивания сформированности компетенций
ОПК-1	Устный опрос	Низкий (неудовлетворительно)	Студент отвечает неправильно, нечетко и неубедительно, дает неверные формулировки, в ответе отсутствует какое-либо представление о вопросе
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент отвечает неконкретно, слабо аргументировано и не убедительно, хотя и имеется какое-то представление о вопросе
		Базовый (хорошо)	Студент отвечает в целом правильно, но недостаточно полно, четко и убедительно
		Высокий (отлично)	Ставится, если продемонстрированы знание вопроса и самостоятельность мышления, ответ соответствует требованиям правильности, полноты и аргументированности.
ОПК-1	Письменный опрос (домашнее задание или контрольная работа)	Низкий (неудовлетворительно)	Студент: 1. допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка "3"; 2. или если правильно выполнил менее половины работы.
		Пороговый (удовлетворительно)	Студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил: 1. не более двух грубых ошибок; 2. или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета;

			3. или не более двух-трех негрубых ошибок; 4. или одной негрубой ошибки и трех недочетов; 5. или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов.
		Базовый (хорошо)	Студент выполнил работу полностью, но допустил в ней: 1. не более одной негрубой ошибки и одного недочета; 2. или не более двух недочетов.
		Высокий (отлично)	Студент 1. выполнил работу без ошибок и недочетов; 2. допустил не более одного недочета.

### 6.2 Промежуточная аттестация студентов по дисциплине

Промежуточная аттестация является проверкой всех знаний, навыков и умений студентов, приобретённых в процессе изучения дисциплины. Формой промежуточной аттестации по дисциплине является **зачет**.

Для оценивания результатов освоения дисциплины применяется следующие критерии оценивания.

#### Критерии оценки устного ответа на зачете

- оценка «зачтено» выставляется студенту, если вопросы раскрыты, изложены логично, без существенных ошибок, показано умение иллюстрировать теоретические положения конкретными примерами, продемонстрировано усвоение ранее изученных вопросов, сформированность компетенций, устойчивость используемых умений и навыков. Допускаются незначительные ошибки.

- оценка «не зачтено» выставляется, если не раскрыто основное содержание учебного материала; обнаружено незнание или непонимание большей или наиболее важной части учебного материала; допущены ошибки в определении понятий, которые не исправлены после нескольких наводящих вопросов; не сформированы компетенции, умения и навыки.

### 6.3 Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки результатов освоения дисциплины

#### Контрольная работа «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

##### I вариант

1. Найдите значение производной функции  $f(x) = 10^{x^2+1}$  в точке  $x_0 = 1$ .
2. Найдите  $d^2 g$ , если  $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ .
3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции  $y = x^3 - 7x + 12$ , наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке  $[0; 4]$ .
4. Проведите исследование функции  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$  и постройте её график.

##### II вариант

1. Найдите значение производной функции  $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$  в точке  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .

2. Найдите  $d^2 g$ , если  $g(y) = 2^{3y-1}$ .
3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции  $y = x^3 + 5x^2 - x - 6$ , наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке  $[-6; -1]$ .
4. Проведите исследование функции  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$  и постройте её график.

### Контрольная работа «Интегрирование функций одной переменной»

#### I вариант

1. Найти неопределенные интегралы:  
а)  $\int x \cdot \sqrt{1-x^2} dx$ , б)  $\int (2-x) \cdot e^x dx$ .
2. Вычислить:  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x \cos 2x dx$ .
3. Вычислить площадь фигуры  $\Phi$ , ограниченной гиперболой и параболой:  $y = \frac{4-4x}{x}$ ,  $y = -x^2 + 4x - 3$ .
4. Исследовать сходимость несобственного интеграла:  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ .

#### II вариант

1. Найти неопределенные интегралы:  
а)  $\int (2x+1) \cdot \cos 3x dx$ , б)  $\int \left(\frac{x}{x+3}\right)^2 dx$ .
2. Вычислить:  $\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^x \cdot \sqrt{e^x + 1} dx$ .
3. Вычислить объем тела, полученного вращением графика функции  $y = \sin 3x$  и прямых  $x = 0$  и  $x = \frac{\pi}{3}$  вокруг оси абсцисс.
4. Исследовать сходимость несобственного интеграла:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

### Домашняя контрольная работа «Теория вероятностей»

#### I вариант

1. В ящике содержится 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наудачу взял 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.
2. Четыре пловца взяли старт на соревнованиях по плаванию. Вероятность уложиться в рекордное время у первого пловца равна 0,95, у второго – 0,92, у третьего – 0,9, у четвертого – 0,88. Найти вероятность того, что: а) все пловцы станут рекордсменами, б) один пловец станет рекорсменом.
3. Имеются три одинаковых по виду ящика. В первом ящике 20 белых шаров, во втором – 10 белых и 10 черных шаров, в третьем – 20 черных шаров. Из выбранного наугад ящика вынули белый шар. Какова вероятность того, что этот шар был вынут из первого ящика?
4. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек равна 0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке, если броски считать независимыми? Каково наиболее вероятное число попаданий кольца на колышек при восьми бросаниях?

5. Всхожесть семян данного растения равна 0,9. Найдите вероятность того, что из 900 посаженных семян число проросших будет заключено между 790 и 830.
6. См. задачу 5. Какова вероятность того, что частота проросших семян отклонится по абсолютной величине от вероятности прорастания не больше, чем на 0,01?
7. По данным эмпирических измерений методом наименьших квадратов найти уравнение линейной зависимости между переменными  $x$  и  $y$ :

$x$	0	2	3	4	5	6	8	10
$y$	1,5	3	4	5	5,5	7	7,5	9

8. М различных шариков случайным образом разбрасываются по  $N$  лункам ( $N > M$ ). Определить вероятность того, что в первых  $M$  лунках будет ровно по одному шару, если в одну лунку могут поместиться все шары.
9. Имеется 10 билетов в театр, из которых 6 билетов на места первого ряда. Какова вероятность того, что из четырех наудачу выбранных билетов два окажутся на места первого ряда.
10. В магазин вошли три покупателя. Вероятность совершить покупку для первого покупателя 0,7, для второго – 0,4, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что 1) покупку совершит только один покупатель, 2) покупку совершит хотя бы один покупатель, 3) никто не совершит покупку.
11. В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающие независимо друг от друга. Вероятность отказа первого, второго и третьего элементов соответственно равны  $p_1=0,1$ ,  $p_2=0,2$ ,  $p_3=0,3$ . Найдите вероятность того, что тока в цепи не будет.
12. Наудачу взяты два положительных числа  $x$  и  $y$ , каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма  $x+y$  не превышает единицы, а произведение  $xy$  не меньше 0,09.
13. На отрезке  $AB$  длиной  $l$  наудачу поставлены две точки  $L$  и  $M$ . Найти вероятность того, что точка  $L$  будет ближе к точке  $M$ , чем к точке  $A$ .

### Групповое домашнее задание по теме «Дискретные случайные величины»

#### I вариант

1. Случайная величина задана таблицей распределения:

$X$	-3	-2	0	1	3
$p$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Вычислить  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma$ ,  $P(X > 0)$ ,  $P(|X| > 2)$ .

2. Вероятность попадания из орудия в цель при одном выстреле равна  $\frac{2}{3}$ . Составить таблицу распределения числа попаданий при четырех выстрелах. Найти  $M(X)$ ,  $D(X)$ ,  $\sigma$ . Построить многоугольник распределения.
3. У охотника 4 патрона. Он стреляет по зайцу пока не попадет или пока не кончатся патроны. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,7. Составить таблицу распределения числа выстрелов. Сколько раз в среднем придется стрелять охотнику?
4. В коробке 5 красных карандашей и 3 зеленых. Выбирают наудачу 3 карандаша. Составить таблицу распределения случайной величины, означающей число зеленых карандашей, оказавшихся в выборке. Найти  $F(x)$ , построить ее график.
5. Найти среднее число страниц с опечатками, если книга содержит 800 страниц, а вероятность опечатки на одной странице равна 0,05.

### Групповое домашнее задание по теме «Непрерывные случайные величины»

#### I вариант

1. Непрерывная случайная величина  $X$  задана функцией распределения



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \frac{\pi}{2} \\ A \cos x & \text{при } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ 1 & \text{при } x > \pi \end{cases} . \text{Найти параметр } A, P\left(\frac{\pi}{3} < X < \frac{\pi}{2}\right), P\left(\frac{\pi}{4} < X < 2\pi\right),$$

$P(X = \pi)$ , плотность вероятностей  $f(x)$ , построить графики  $f(x)$ ,  $F(x)$ .

2. Плотность вероятности непрерывной случайной величины  $X$  равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2}, & \text{если } 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

а) Построить функцию распределения  $F(x)$  и начертить ее график; б) найти числовые характеристики случайной величины.

### Групповое домашнее задание по теме «Нормальное распределение»

#### I вариант

1. Нормально распределенная случайная величина  $X$  задана плотностью вероятности

$f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$ . Найти вероятность того, что случайная величина  $X$  примет значение в интервале (7;9).

2. Используя свойства кривой плотности вероятностей случайной величины  $X$ , подчиненной нормальному закону распределения, найдите ее математическое ожидание, если известно, что  $P(-\infty < X < -1) = P(4 < X < +\infty)$ . Запишите выражение для  $f(x)$  и схематически изобразите график  $f(x)$ , если  $\sigma = 1$ .

3. Автомат изготавливает шарики. Шарик считается годным, если отклонение  $X$  диаметра шарика от проектного размера по абсолютной величине меньше 0,7 мм. Считая, что случайная величина  $X$  распределена нормально со средним квадратическим отклонением  $\sigma = 0,4$  мм, найти, сколько будет годных шариков среди ста изготовленных.

### Программа зачета

#### Раздел I. Математический анализ: дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Действительная функция действительной переменной. Некоторые типы поведения функции. Сложная функция. Обратная функция.
2. Основные элементарные функции, их свойства, графики.
3. Производная функции, её геометрический смысл.
4. Дифференцируемость функции в точке. Критерий дифференцируемости функции в точке. Дифференциал функции.
4. Непрерывность дифференцируемой функции.
5. Правила дифференцирования функции: дифференцирование суммы, произведения, частного, сложной функции, производная обратной функции.
6. Таблица производных.
7. Производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков.
8. Свойства дифференцируемых функций: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа.
9. Применение производной к исследованию монотонности функции.
10. Исследование экстремума и нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке с помощью производной.

11. Исследование выпуклостей графика функции и нахождение точек перегиба графика функции.
12. План исследования функции, построение графика функции с использованием плана.

## **Раздел II. Математический анализ: интегральное исчисление функций одной переменной**

1. Первообразная функция и неопределенный интеграл.
2. Основные свойства неопределенного интеграла.
3. Таблица основных интегралов.
4. Интегрирование по частям.
5. Интегрирование заменой переменной.
6. Интегрирование рациональных функций.
7. Интегрирование тригонометрических функций.
8. Интегрирование простейших иррациональных функций.
9. Определенный интеграл.
10. Основные свойства определенного интеграла.
11. Формула Ньютона – Лейбница.
12. Интегрирование по частям под знаком определенного интеграла.
13. Интегрирование заменой переменной под знаком определенного интеграла.
14. Несобственные интегралы I и II рода, их свойства. Геометрический смысл несобственных интегралов.
15. Применения интегрального исчисления в геометрии (формулы для вычисления площади криволинейной трапеции, длины дуги кривой, объема тела вращения).

## **Раздел III. Элементы комбинаторики**

1. Основные законы комбинаторики: правило суммы, правило произведения.
2. Основные формулы комбинаторики: размещения с повторениями, размещения без повторений, перестановки без повторений, перестановки с повторениями, сочетания без повторений, сочетания с повторениями.

## **Раздел IV. Элементы теории вероятностей**

1. Событие. Определения вероятности события (событие, виды событий, вероятность события классическое, статистическое, геометрическое определение вероятности)
2. Теоремы сложения и умножения вероятности.
3. Формулы полной вероятности.
4. Формула Байеса.
5. Формула Бернулли.
6. Понятие дискретной случайной величины.
7. Законы распределения вероятностей дискретной случайной величины.
8. Числовые характеристики дискретной случайной величины.
9. Биномиальное и пуассоновское распределения.
10. Понятие непрерывной случайной величины.
11. Функции распределения, плотности вероятностей непрерывной случайной величины.
12. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
13. Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины.
14. Закон больших чисел.

## **Раздел IV. Элементы математической статистики**

1. Количество информации и мера неопределенности случайной величины (понятие количества информации и энтропии, связь между количеством информации и энтропией).
2. Оценки неизвестных параметров распределения и статистические гипотезы (задача оценки параметров, точечные оценки математического ожидания и дисперсии, метод наибольшего правдоподобия для нахождения оценок, построение доверительного интервала при известном и неизвестном  $\sigma$ , общая постановка задачи проверки гипотезы, критерий согласия хи-квадрат в случае, когда по выборке оцениваются параметры)

3. Элементы теории корреляции (виды зависимостей между случайными величинами, корреляционные зависимости, отыскание параметров прямых линий регрессии методом наименьших квадратов, простейшие случаи нелинейной корреляции, понятие множественной корреляции).

## **7 ПЕРЕЧЕНЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ**

**Информационные технологии** – обучение в электронной образовательной среде с целью расширения доступа к образовательным ресурсам, увеличения контактного взаимодействия с преподавателем, построения индивидуальных траекторий подготовки, объективного контроля и мониторинга знаний студентов.

В образовательном процессе по дисциплине используются следующие информационные технологии, являющиеся компонентами Электронной информационно-образовательной среды БГПУ:

- Официальный сайт БГПУ;
- Система электронного обучения ФГБОУ ВО «БГПУ»;
- Система тестирования на основе единого портала «Интернет-тестирования в сфере образования [www.i-exam.ru](http://www.i-exam.ru)»;
- Электронные библиотечные системы;
- Мультимедийное сопровождение лекций.

## **8 ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ ИНВАЛИДАМИ И ЛИЦАМИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ**

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья применяются адаптивные образовательные технологии в соответствии с условиями, изложенными в раздел «Особенности организации образовательного процесса по образовательным программам для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья» основной образовательной программы (использование специальных учебных пособий и дидактических материалов, специальных технических средств обучения коллективного и индивидуального пользования, предоставление услуг ассистента (помощника), оказывающего обучающимся необходимую техническую помощь и т.п.) с учётом индивидуальных особенностей обучающихся.

## **9 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ**

### **9.1 Литература**

1. Глотова, М.Ю. Математическая обработка информации: учебник и практикум для бакалавров / М.Ю. Глотова, Е.А. Самохвалова. М. – Издательство Юрайт, 2014. – 344 с. (30 экз.)
2. Пушкина, О.Н. Интегральное исчисление функций одной переменной: учеб. пособие для ст-тов вузов / О.Н. Пушкина, Л.В. Насонова. – Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2015. – 130 с. (20 экз.)
3. Баврин, И.И. Высшая математика: учебник для ст-тов пед. вузов / И.И. Баврин. – М.: Академия, 2004. – 611 с.- (33 экз.).
4. Баврин, И.И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / И.И.Баврин. М.: Высш. шк., 2005. – 160 с. – (30 экз.).
5. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей: учеб. для студ. вузов. – 7-е изд., стереотип / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 2001. – 572 с. – (5 экз.).
6. Вся высшая математика: учебник для ст-тов вузов / М.Л. Краснов, А.И. Киселёв, Г.И. Макаренков и др. Т.2. – М.: УРСС, 2004. – 187 с. – (13 экз.).
7. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие для студ. вузов / В. Е. Гмурман. - 9-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2004. - 403 с. – (23 экз.).

8. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2ч. : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов. - 6-е изд. - М. : ОНИКС 21 век: Мир и Образование, 2003. Высшая математика в упражнениях и задачах в 2ч. Ч.1 : учеб. пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. - 6-е изд. - М. : ОНИКС 21 век : Мир и Образование, 2003. - 303 с. - (16 экз.).

9. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: учебное пособие для вузов. - В 2-х ч. Ч. 2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - М.: ОНИКС 21 век. Изд-во «Мир и образование», 2005.—415 с. - (30 экз.).

10. Дифференциальное исчисление функций одной переменной: учебное пособие / В.В. Ильина [и др.]; М-во образования и науки Российской Федерации, Федеральное агентство по образованию, БГПУ. - Благовещенск: [Изд-во БГПУ], 2006. - 93 с. - (34 экз.).

11. Дорофеева, А.В. Высшая математика. Гуманитарные специальности. / А.В. Дорофеева. - М.: Дрофа, 2003. - 384 с. - (6 экз.).

12. Избранные вопросы математического анализа. Предел функции и непрерывность: учебное пособие / Н.В. Ермак [и др.]; М-во образования и науки Российской Федерации, Федеральное агентство по образованию, БГПУ. - Благовещенск: [Изд-во БГПУ], 2005. - 115 с. - (6 экз.).

13. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. - 3-е изд., перераб. - М. : Физматлит, 2002. Т.1 : Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды : учебник для студ. вузов. - 399 с. - (50 экз.).

14. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. / Д.Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс, 2009. - 608 с. - (5 экз.).

15. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Письменный. - М.: Айрис-пресс, 2008. - 288с.- (10 экз.).

16. Пушкина, О.Н. Практикум по математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / О.Н.Пушкина. - Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2006.—93с. - (10 экз.).

17. Пушкина, О.Н. Теория вероятностей: в 2 ч. Ч.1. Случайные события: учебное пособие для студентов вузов / О.Н.Пушкина. - Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2009. - 107с. - (7 экз.).

18. Пушкина, О.Н. Теория вероятностей: в 2 ч. Ч.2. Случайные величины: учебное пособие для студентов вузов / О.Н.Пушкина. - Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2009. - 123с.- (7 экз.).

19. Турецкий, В.Я. Математика и информатика: учебное пособие для студ. вузов / В.Я. Турецкий; М-во образования Российской Федерации, Уральский гос. Ун-т. - М.: ИНФРА - М, 2008. - 557 с. - (10 экз.).

20. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. - В 2-х ч. Ч.1. / Г.М. Фихтенгольц. - СПб.; М.; Краснодар: Изд-во «Лань», 2006. - 440 с. - (11 экз.).

21. Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. - В 2-х ч. Ч.2. / Г.М. Фихтенгольц. - СПб.; М.; Краснодар: Изд-во «Лань», 2006. - 463 с. - (24 экз.).

22. Якшина, А.С. Приложения определенного интеграла при решении геометрических и физических задач: учеб. пособие / А.С. Якшина. - Благовещенск: Изд-во БГПУ, 2014. - 172 с. - (21 экз.).

## 9.2 Базы данных и информационно-справочные системы

1. Федеральный портал «Российское образование» - <http://www.edu.ru>.
2. Портал научной электронной библиотеки - <http://elibrary.ru/defaultx.asp>.
3. Интернет-Университет Информационных Технологий.- Режим доступа: <http://www.intuit.ru>
4. Математика на ПостНауке: <https://postnauka.ru/themes/math-2>

## 9.3 Электронно-библиотечные ресурсы

1. Polpred.com ОбзорСМИ/Справочник [http:// polpred.com/news](http://polpred.com/news).
2. ЭБС «Юрайт» <https://urait.ru/>.

## 10 МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для проведения занятий лекционного и практического типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации используются аудитории, оснащённые учебной мебелью, аудиторными досками, компьютерами с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением, коммутаторами для выхода в электронно-библиотечную систему и электронную информационно-образовательную среду БГПУ, мультимедийными проекторами, экспозиционными экранами, учебно-наглядными пособиями (стенды, карты, таблицы, мультимедийные презентации). Требуется большая аудиторная доска, мел, тряпка.

Для практических занятий также используется: Ауд. 101, укомплектованная следующим оборудованием:

- Комплект компьютерных столов.
- Стол преподавателя
- Пюпитр
- Аудиторная доска
- Компьютер с установленным лицензионным специализированным программным обеспечением
- Мультимедийный проектор
- Экспозиционный экран
- Учебно-наглядные пособия - слайды, таблицы, мультимедийные презентации по дисциплине «Математика»
- Комплект чертёжных инструментов
- Комплект математических моделей

Самостоятельная работа студентов организуется в аудиториях, оснащенных компьютерной техникой с выходом в электронную информационно-образовательную среду вуза, а также в залах доступа в локальную сеть БГПУ и др.

Лицензионное программное обеспечение: операционные системы семейства Windows, Linux; офисные программы Microsoftoffice, Libreoffice, OpenOffice; и т.д.

Разработчик рабочей программы – доцент кафедры физического и математического образования, к.ф.-м. н., доцент А.С. Якшина

## 11 ЛИСТ ИЗМЕНЕНИЙ И ДОПОЛНЕНИЙ

### Утверждение изменений в РПД для реализации в 2021/2022 уч. г.

РПД пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2021/2022 учебном году на заседании кафедры (протокол № 1 от 8 сентября 2021 г.). В рабочую программу внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 1	
№ страницы с изменением: 45	
Исключить:	Включить: в п. 9.3
	ЭБС «Юрайт» - <a href="https://urait.ru">https://urait.ru</a> .

### Утверждение изменений и дополнений в РПД для реализации в 2022/2023 уч. г.

Рабочая программа дисциплины пересмотрена, обсуждена и одобрена для реализации в 2022/2023 учебном году на заседании кафедры (протокол № 9 от 26 мая 2022 г.). В РПД внесены следующие изменения и дополнения:

№ изменения: 2	
№ страницы с изменением: 43	
В Раздел 9 внесены изменения в список литературы, в базы данных и информационно-справочные системы, в электронно-библиотечные ресурсы. Указаны ссылки, обеспечивающие доступ обучающимся к электронным учебным изданиям и электронным образовательным ресурсам с сайта ФГБОУ ВО «БГПУ».	